UNIVERSITE des SCIENCES et de la TECHNOLOGIE d'ORAN
Faculté des mathématiques et Informatique, Département de Mathématiques

Année :2019/2020

1^e année Master Analyse mathématique et application.

Module : Théorie spectrale

Corrigé Série de TD $N°3$

(Opérateurs non borné, fermé, fermable et théorie spectrale)

Exercice 1. Soit $H = L^2([0,1]$. On considère l'opératur T non borné, de domaine $D(T) = C([0,1])$ et défini par $Tf(0) = f(0)$.
Montrer que T est de domaine dense ($\overline{D(T)} = H$) mais il n'est pas fermable.
Réponse L'ensemble $C([0,1])$ est dense dans $L^2([0,1])$ (Proposition en Analyse fonctionnelle : $C(K)$, K est un compacte de $\mathbb{R}^n$ est dense

dans $L^p(K)$, $1 \leq p < +\infty$) donc le domaine de T est dense dans $H = L^2([0,1]$. Appliquons la proposition 22 en effet si l'on considère $(x_n)_n$ une suite dans $D(T)$ définie par $x_n(t) = (1-t)^n$, on a : $\|x_n\|_{L^2([0;1])} = (\int_0^1 (1-t)^{2n} dt)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \to 0$ et $T(x_n(0) = x_n(0) = 1$ donc T n'est pas fermable.

Exercice 2. Soit $E = C([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Soit l'opérateur T défini sur $D = C^1([0,1])$ par $T(f(x) = f'(x)$

1. Montrer que T est fermé à domaine dense.
2. Montrer que $\sigma(T) = \mathbb{C}$

Réponse D'aprés le théoème de Stone-Weirstrass l'espace des polynômes de $[0,1]$ est dense dans $C([0,1])$ (Polynôme d'interpolation par exemple)our la norme uniforme, l'ensemble des polynome est contenu dans $C^1([0,1])$ ($\forall f \in C([0,1]) \exists (P_n)$ sur $[0,1]$ telque $\|f - P_n\|_\infty \to 0$ On applique la définition 37, on montre que le graphe de T est fermé ($\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(T)$) $\Gamma(T) = \{(f, Tf),\ f \in D(T)\}$. Soit $(f,g) \in \overline{\Gamma(T)} \Rightarrow \exists (f_n, Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\Gamma(T)$ qui converge vers (f,g) pour la norme du graphe ($\|(f,g)\| = \|f\| + \|g\|$ c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \|T(f_n) - g\| = 0$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \|f'_n - g\| = 0$ d'aprés un théorème d'analyse 3 on conclue que f est dérivable et $g = f'$ donc T est fermé.
2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ $T(f) - \lambda f = 0$ pour $f \in C^1([0,1])$ on obtient $f' = \lambda f$, $f(t) = e^{\lambda t}$ est une solution non nulle alors $T - \lambda Id_E$ n'est pas injectif donc n'est pas bijectif pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ alors λ n'est pas une caleur régulière et $\sigma(T) = \mathbb{C}$

Exercice 3. Soit $H = L^2([0,1],\mathbb{C})$, on définit les troix opérateurs non bornés :T_1, T_2, etT_3par :

1. $D(T_1) = \{f \in H : f' \in H\} = H^1([0,1],\mathbb{C})$
2. $D(T_2) = D(T_1) \bigcap \{f \in H;\ f(0 = f(1)\}$
3. $D(T_3) = D(T_1) \bigcap \{f \in H;\ f(0 = f(1) = 0\}$

et $T_k(f) = if'$, $(k = 1,2,3)$.
Montrer que :

$$T_3 \subset T_2 \subset T_1 \,\text{et}\, T_1^\star = T_3,\ T_2^\star = T_2\, T_3^\star = T_1$$

il faut corriger

Réponse 1) Il est claire que $D(T_3) \subset D(T_2) \subset D(T_1)$ et $T_3(f) = T_2 = T_1(f)$ $\forall f \in D(T_3)$ donc $T_3 \subset T_2 \subset T_1$.
2) Montrons que $T_1^\star = T_3$ on doit d'abord vérifier que les domaines de T_1, T_2 et T_3 sont dense dans $L^2([0,1],\mathbb{C})$ pour $D(T_1)$ on sait que $C[0,1]$ est dense dans $L^2([0,1],\mathbb{C})$ et l'ensemble des polynomes et dense dans $C[0,1]$ et chaque polynôme dans $\{f \in H : f' \in H\} = H^1([0,1],\mathbb{C})$ d'où $\overline{D(T_1)} = L^2([0,1],\mathbb{C})$.
Pour $D(T_2)$ par interpolation on peut toujour approximer une fonction continue sur $[0,1]$ par un polynome dont les valeurs sont égales en $0, 1$ ce polynôme est bien dans $H^1([0,1],\mathbb{C})$ et $D(T_2)$ est dense dans $L^2([0,1],\mathbb{C})$. la même chose pour $D(T_3)$ ($\forall f \in L^2([0,1],\mathbb{C}) \Rightarrow \exists (g_n)_n \in C([0,1],\mathbb{C}) \lim_{n\to\infty} \|f - g_n\|_{L^2([0,1]} = 0 \Rightarrow \exists (h_n)_k$polynôme nul en$0,1$ $\lim_{k\to\infty} \|g_n - h_{nk}\|_\infty = 0$ On obtient $\|f - h_{nk}\|_{L^2([0,1]} \leq \|f - g_n\|_{L^2([0,1]} + \|g_n - h_{nk}\|_{L^2([0,1]} \leq \|f - g_n\|_{L^2([0,1]} + \|g_n - h_{nk}\|_\infty \to 0$ et $\overline{D(T_3)} = L^2([0,1],\mathbb{C})$
a) montrons que $T_1^\star = T_3$ Soient f $D(T_1)$ et $g \in D(T_3)$ calculons $\langle f, T_3(g)\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{ig'(x)}dx = -i\int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}dx = -i(f(1)\overline{g}(1) - f(0)\overline{g}(0) - \int_0^1 f'(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 if'(x)\overline{g(x)}dx = \langle T_1 f, g\rangle$
(On sait que si $g : [0,1] \to \mathbb{C})$ $g(x) = u(x) + iv(x)$, $\overline{g}(x) = u(x) - iv(x)$, $g'(x) = u'(x) + iv'(x)$,$\overline{g}'(x) = u'(x) - iv'(x) = (\overline{g}(x)'$ et si $g(0) = g(1) = 0 \Rightarrow \overline{g}(0) = \overline{g}(1) = 0)$ et le résultat $\langle f, T_3(g)\rangle = \langle T_1 f, g\rangle$.
Soient $f, g \in D(T_2)$, $\langle f, T_2(g)\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{ig'(x)}dx = -i\int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}dx = -i(f(1)\overline{g}(1) - f(0)\overline{g}(0) - \int_0^1 f'(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 if'(x)\overline{g(x)}dx = \langle T_2 f, g\rangle$ (car $f(0 = f(1)$ et $g(0 = g(1) \Rightarrow \overline{g}(0) = \overline{g}(1)$
On a montré que $T_1^\star = T_3$ on veut montrer que $T_3^\star = T_1$ Soient $f \in D(T_3)$ et $g \in D(T_1)$ calculons $\langle f, T_1(g)\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{ig'(x)}dx = -i\int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}dx = -i(f(1)\overline{g}(1) - f(0)\overline{g}(0) - \int_0^1 f'(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 if'(x)\overline{g(x)}dx = \langle T_3 f, g\rangle$
(car $f(0) = f(1) = 0$)