Chapitre 3

Introduction :

Définition :

Une poutre est sollicitée à la torsion simple si elle est soumise à deux couples de moments opposés portés par la ligne moyenne.

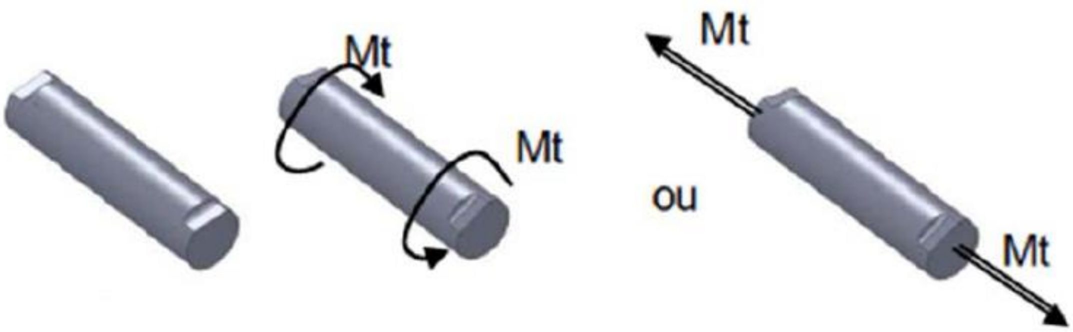


Figure 1 : Moments des actions extérieures appliqués à de la poutre.

La poutre est supposée à section circulaire constante et de poids négligé.

Essai de torsion simple

Principe :

Une éprouvette cylindrique de révolution est encastrée à son extrémité (S_1) de centre de gravité G_1. On applique à l'extrémité droite sur la section (S_2) de centre de gravité G_2 une action mécanique modélisée en G_2 par un moment de torsion M_{G2} :

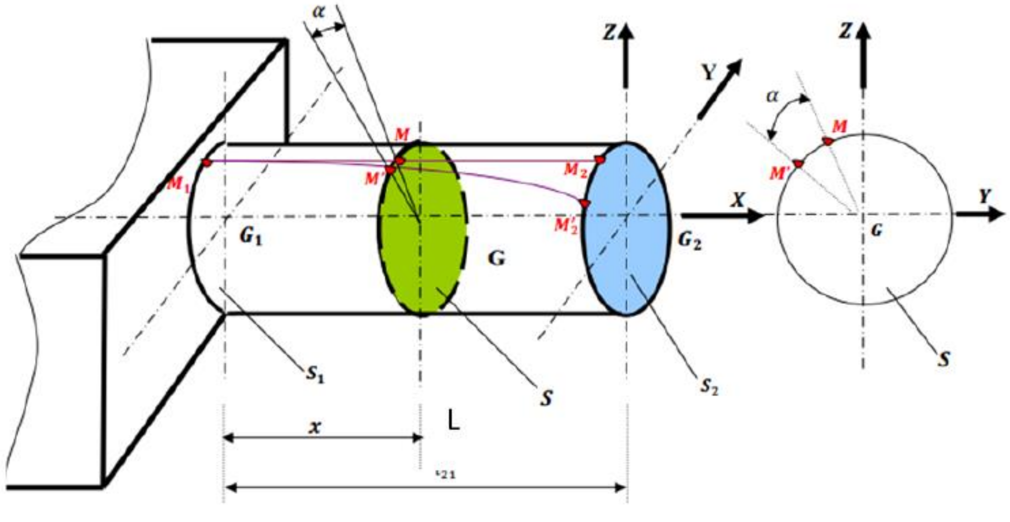


Figure 2 : Illustration de l'essai de torsion simple.

Résultats :

Le déplacement d'une section droite (S) est uniquement une rotation d'un angle α autour de son axe, et cette rotation est proportionnelle à sa distance x par rapport à (S_1).
On obtient une courbe illustrée à la Figure 3 semblable à celle de l'essai de traction :

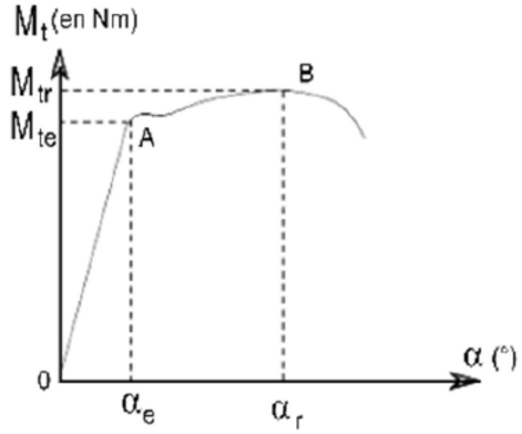


Figure 3 : courbe $M_t = f(\alpha)$

Elle comprend une zone de déformations élastiques où l'angle de torsion α est proportionnel au moment de torsion. A partir du point A les déformations croissent rapidement jusqu'à avoir rupture de l'éprouvette.

Etude des déformations :

L'essai montre que toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe et que la distance relative entre deux sections reste sensiblement constante. Toutes les fibres se déforment donc suivant une hélice, sauf la ligne moyenne qui reste droite.
On constate que le rapport $\theta = \frac{\alpha}{L}$ reste toujours constant. Ce rapport est appelé angle unitaire de torsion [rad /mm].
α = Angle de rotation de la section S en rad.
x = Distance séparant (S) à la section de référence(S_1) en mm.

Etude des contraintes :

On considère la section (S) à une distance x de (S_1). Après déformation, le point M (Figure 2) situé à une distance ρ du centre G vient en M', la génératrice M_1M subit alors une déviation γ comparable à celle observée dans l'étude du cisaillement simple et devient M_1M'.
La distance relative entre deux sections reste constante au cours de la déformation, donc l'allongement Δx = 0, alors on peut écrire que la déformation longitudinale ε_x = 0, on admet donc que la composante normale nulle.

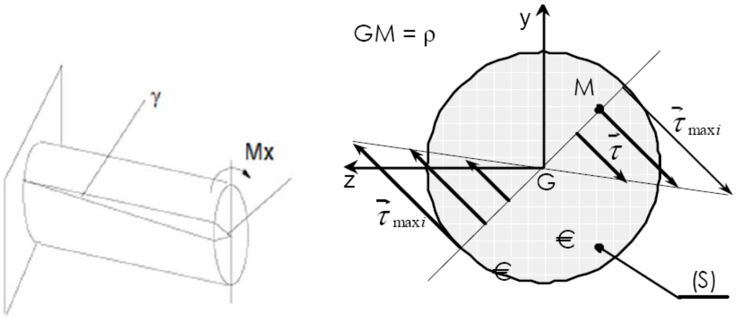


Figure 4 : Répartition des contraintes au niveau de la section.

La loi de Hooke pour les contraintes tangentielles s'exprime donc par : $\tau = G.\ \gamma$ où G est le module d'élasticité transversale ou module de Coulomb.
Dans le triangle M_1MM' avec γ très petit,

$$tg\gamma \approx \gamma = \frac{MM'}{M_1M} = \frac{MM'}{x} = \frac{\alpha\ \rho}{x}$$

on aura $\gamma = \frac{\alpha}{x}\rho = \theta\rho$

La contrainte tangentielle s'écrit alors : $\tau = G.\theta.\rho$

τ : Contrainte tangentielle de torsion (en MPa)

ρ : Distance du point M à la ligne neutre ou axe de la pièce qui ne subit aucun effort (en mm)

θ : Angle unitaire (en rad/ mm)

G : Module d'élasticité transversale ou module de Coulomb (en MPa)

Remarque :

$$G = \frac{E}{2(1+\vartheta)}$$

Pour les aciers, $\upsilon = 0{,}3 \Rightarrow G \approx 0{,}4E$

τ_{max} est atteinte pour les points M périphériques de la surface du solide tels que

ρ = R (Rayon)

Relation entre contrainte et moment de torsion :

En un point M de la section, la distance GM = ρ, la contrainte de torsion est $\tau_M = G.\theta.\rho$, par conséquent la force tangentielle dF agissant sur l'élément dS de la section S à cette distance est $dF = \tau_M.dS$ et le moment de torsion qui est égal au produit vectoriel de la distance par la force est :

$$M_t = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{dF} = \int_S \rho.\tau_M dS = \int_S \rho.G.\theta.\rho.dS = G.\theta.\int_S \rho^2 dS = G.\theta.I_p$$

$I_p = \int_S \rho^2 dS$: le moment quadratique polaire de la section S par rapport à son centre de gravité G. I_p dépend de la forme et des dimensions de cette section.

Exemples :

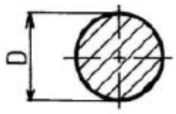
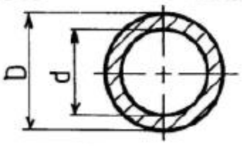
Sections	Caractéristiques
	$I_o = \frac{\pi D^4}{32}$ $\frac{I_o}{R} = \frac{\pi D^3}{16}$
	$I_o = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right)$ $\frac{I_o}{R} = \frac{\pi D^3}{16} - \frac{\pi d^3}{16}$

Figure 5 : Moment quadratique polaire en fonction de la section.

La relation entre le moment et la déformation (équation de déformation) est: $\mathbf{M_t=G.\theta.I_p}$

Il en découle que $\tau_M = \frac{M_t}{I_p}\rho$ ou $\tau_M = \frac{M_t}{\frac{I_p}{\rho}}$

La contrainte maximale de torsion est obtenue pour $\rho = \frac{d}{2}$

La contrainte de torsion maximale est :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_p}\frac{d}{2} = \frac{M_t}{W_t}$$

où $W_t = \frac{I_p}{\frac{d}{2}}$ est le module de torsion.

Les unités des grandeurs sont comme suit : M_t [N mm]; θ [rad/mm]; G [MPa] et I_p [mm^4]

Conditions de résistance:

Les conditions de résistances sont liées aux valeurs limites des propriétés mécaniques du matériau et du service que doit assurer la barre en torsion.

Contrainte de torsion admissible

La contrainte de torsion admissible [τ_t] est le rapport de la limite d'élasticité en torsion τ_e par le coefficient de sécurité *n* :

$$[\tau_t] = \frac{\tau_e}{n}$$

La condition de résistance en termes de contraintes : $\tau_t \leq [\tau_t]$

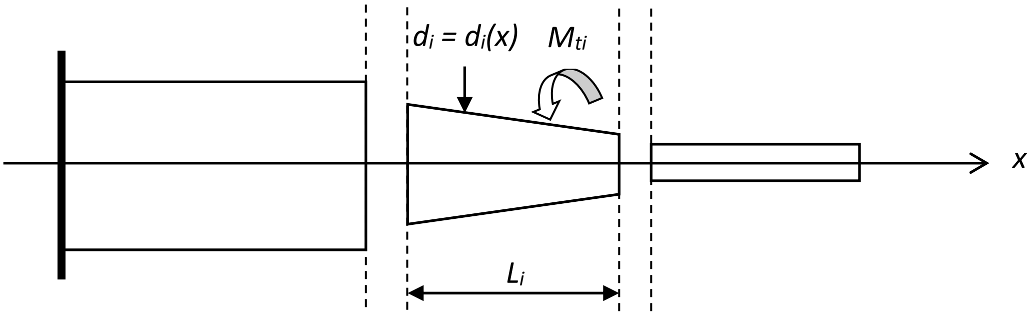
Angle de torsion admissible

D'une manière similaire, le calcul des dimensions des arbres de transmission ou barres de torsion se fait plus par une condition de déformation qu'une condition de résistance en contrainte. En effet pour assurer une transmission rigide et éviter les vibrations, l'angle de torsion unitaire θ ne doit pas dépasser pendant le service, une valeur limite admissible [θ]. D'où la condition de rigidité d'une pièce en en torsion :

$$\theta \leq [\theta]$$

Cas général :

Soit une barre en torsion composée de *n* matériaux (G_i), *n* diamètres (d_i) et *n* longueurs (L_i) variables et soumise à des moments de torsion M_{ti}.



$$\theta = \sum_{i}^{n} \int_0^{L_i} \frac{M_{t_i}}{G_i I_{p_i}} dx$$

Les grandeurs sous l'intégrale peuvent être constantes ou dépendant de *x*.

Dans certains de dimensionnement des barres en torsion, il est nécessaire de satisfaire les deux conditions simultanément :

$$\begin{cases} \tau_t \leq [\tau_t] \\ \theta \leq [\theta] \end{cases}$$

Exemple :

Calcul du diamètre *d* d'une barre cylindrique en torsion de longueur *L* soumise à un moment de torsion M_t :

$$W_t = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16} \quad => \quad \tau_t = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} \leq [\tau_t]$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad => \quad \theta = \frac{M_t L}{G I_p} = \frac{32 M_t L}{G \pi d^4} \leq [\theta]$$

Donc

$$\begin{cases} d_\tau \geq \sqrt[3]{\dfrac{16 M_t}{\pi [\tau_t]}} \\ d_\theta \geq \sqrt[4]{\dfrac{32 M_t L}{\pi G [\theta]}} \end{cases}$$

La plus grande des deux valeurs du diamètre satisfait les deux conditions de résistance.

$$d = Max\{d_\tau, d_\theta\}$$

<u>N.B.</u> : dans les exercices de TD, l'angle de torsion est noté φ au lieu de θ.