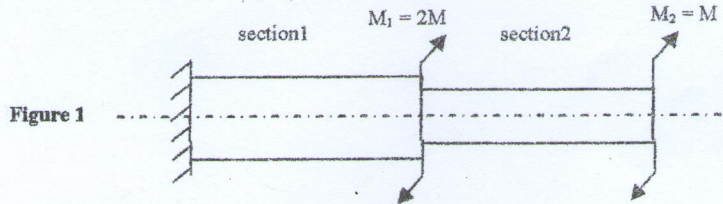


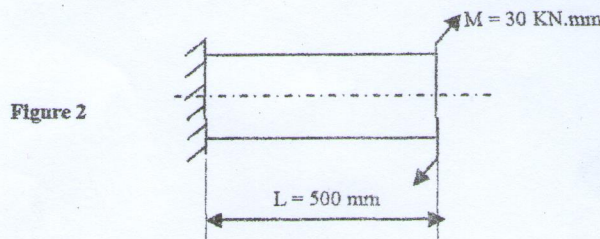
TD N°4 : Résistance des Matériaux

Exercice N°1: Une barre composée de 2 matériaux ($G_1 = 2G$, $G_2 = G$) et de 2 sections ($d_1 = 2d$, $L_1 = L$, $d_2 = d$, $L_2 = L$) est soumise à la torsion comme l'indique la figure 1. Calculer la contrainte de torsion dans chaque section et l'angle de torsion total.



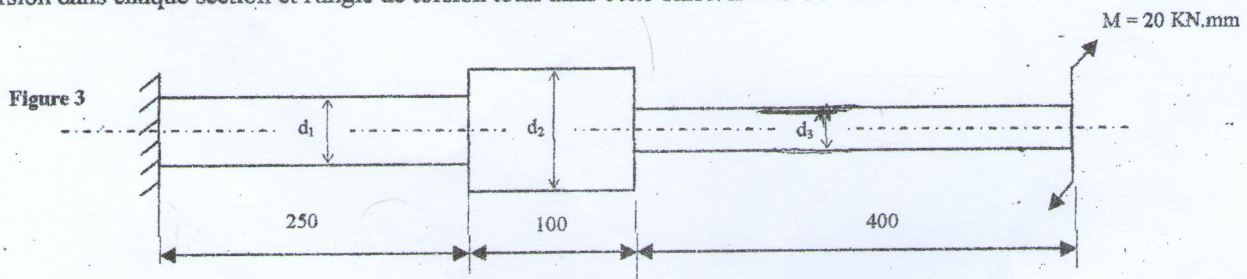
Exercice N°2: La masse d'une barre de torsion de longueur L et de diamètre d est réduite en perçant un trou coaxial débouchant de diamètre $d/2$. Calculer le taux (%) de réduction de la masse en comparaison avec le taux (%) d'augmentation de la contrainte et de l'angle de torsion.

Exercice N°3: Calculer le diamètre d'une barre en torsion de la figure 2 sachant que la contrainte admissible en torsion du matériau est de 50 MPa et l'angle de torsion admissible est de 2° . On donne $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

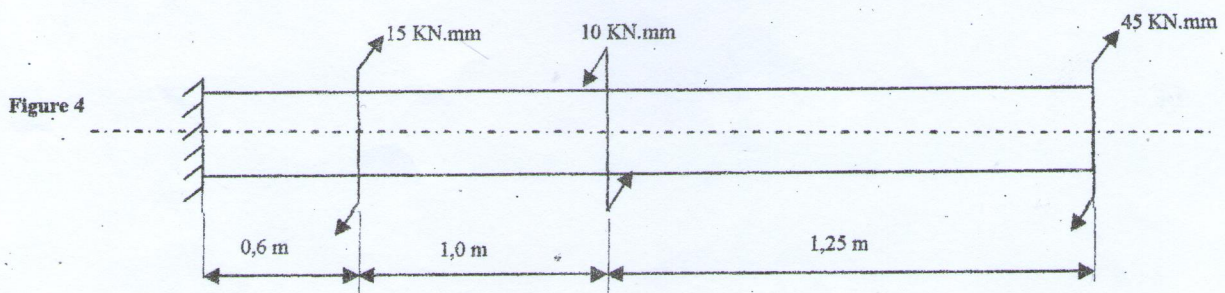


Exercice N°4: Calculer le diamètre d'un arbre de transmission en rotation avec une puissance $\mathcal{P} = 60 \text{ KW}$ et une vitesse de rotation $\omega = 80 \text{ rd/s}$ si $[\tau] = 60 \text{ MPa}$ et $[\Phi'] = 2.10^2 \text{ rd/m}$. On donne $E = 2.0 \cdot 10^5 \text{ MPa}$. $G = 0,4 E = 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

Exercice N°5: La figure 3 représente une barre en acier de longueur totale $L = 750 \text{ mm}$ soumise à un moment de torsion $M = 20 \text{ KN.mm}$. Cette barre comprend 3 sections circulaires $d_2 = 2d_1 = 3d_3 = 30 \text{ mm}$. Déterminer la contrainte de torsion dans chaque section et l'angle de torsion total dans cette barre. $E = 2. \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$.



Exercice N°6: Une barre en acier de diamètre $d = 25 \text{ mm}$ est chargée en torsion selon la figure 4. Tracer les diagrammes des moments, des contraintes et de l'angle de torsion. $G = 0,4 E = 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$



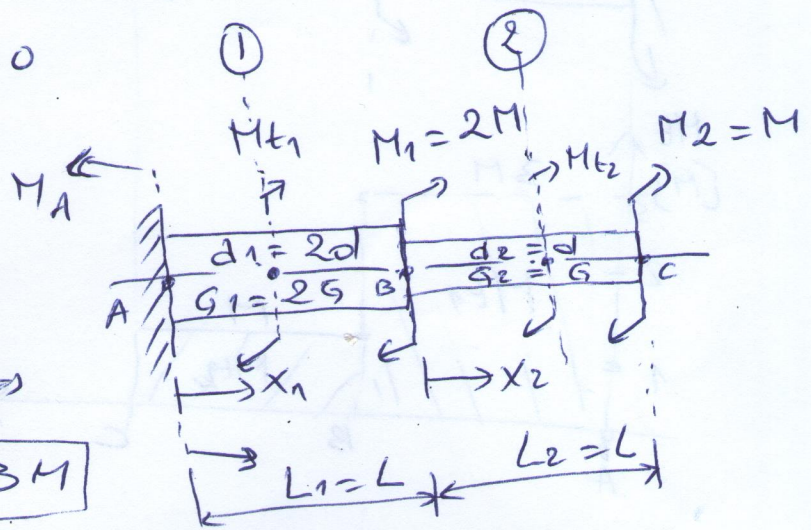
TD N°4 - Torsion.

EX1 | Poutre en équilibre :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - M_1 - M_2 = 0$$

$$M_A = M_1 + M_2 = 2M + M$$

$$\boxed{M_A = 3M}$$



Section ① : $\sum M_i = 0 \Rightarrow$
 $0 \leq x_1 \leq L$
 $A \rightarrow B$: $\boxed{M_{t1} = M_A = 3M}$

$$\tau_{t1} = \frac{M_{t1}}{W_{t1}} = \frac{3M}{\pi d_1^3 / 16} = \frac{3M}{\pi (2d)^3 / 16} = \frac{6M}{\pi d^3} \Rightarrow \boxed{\tau_{t1} = \frac{6M}{\pi d^3}}$$

$$\phi_1 = \frac{M_{t1}}{G_1 I_{o1}} x_1 = \frac{M_{t1}}{G_1 \cdot \frac{\pi d_{o1}^4}{32}} x_1 = \frac{3M}{(2G) \pi \cdot \frac{(2d)^4}{32}} x_1 = \frac{3M}{\pi G d^4} x_1$$

$$\rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_A = 0$$

$$\rightarrow x_1 = L \Rightarrow \phi_1 = \phi_B = \frac{3ML}{\pi G d^4}$$

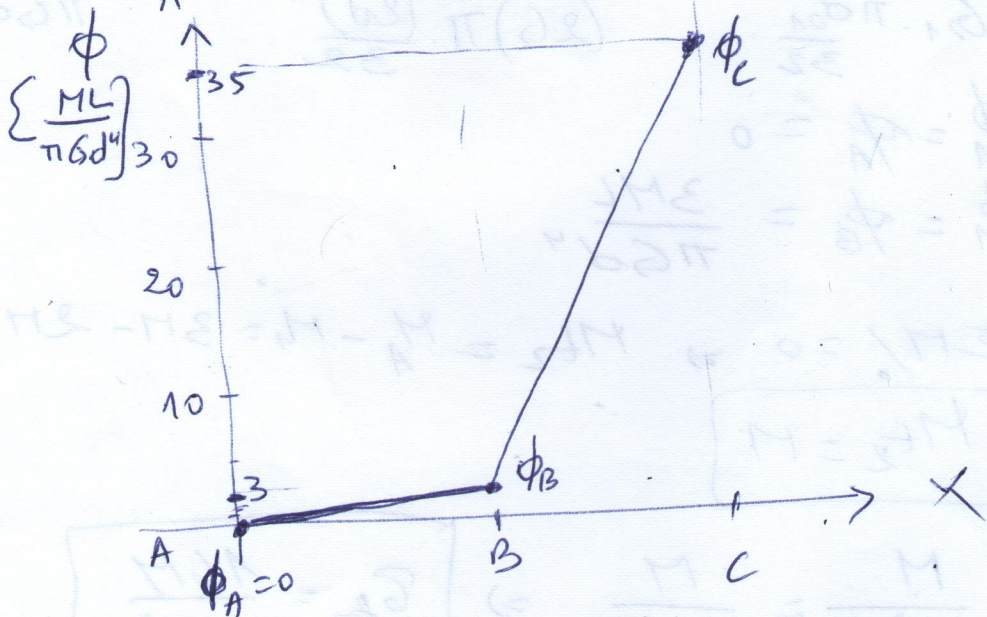
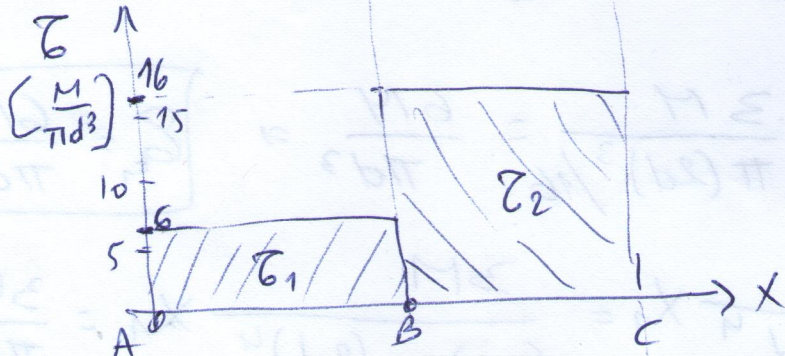
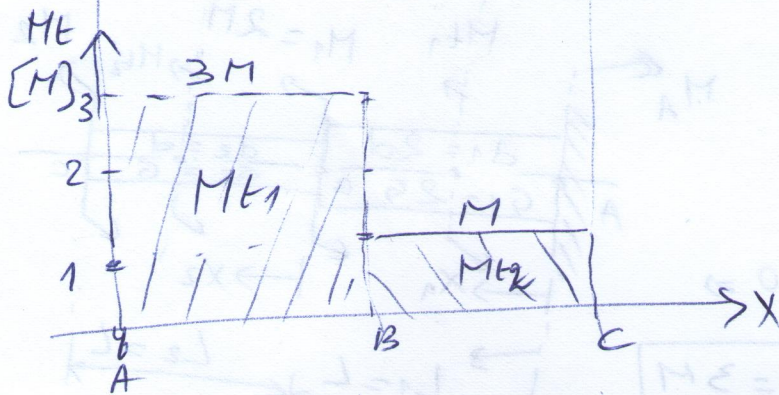
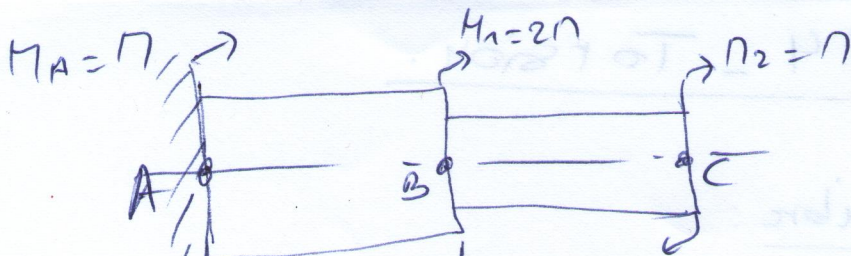
Section ② : $\sum M_i = 0 \Rightarrow M_{t2} = M_A - M_1 = 3M - 2M = M$
 $0 \leq x_2 \leq L$
 $B \rightarrow C$: $\boxed{M_{t2} = M}$

$$\tau_{t2} = \frac{M_{t2}}{W_{t2}} = \frac{M}{\pi d_2^3 / 16} = \frac{M}{\pi d^3 / 16} \Rightarrow \boxed{\tau_{t2} = \frac{16M}{\pi d^3}}$$

$$\phi_2 = \phi_B + \frac{M_{t2}}{G_2 I_{o2}} x_2 = \phi_B + \frac{M}{G_2 \cdot \frac{\pi d_2^4}{32}} x_2 = \phi_B + \frac{32M}{\pi G d^4} x_2$$

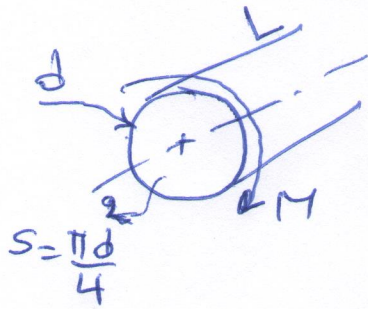
$$\rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \phi_2 = \phi_B = \frac{3ML}{\pi G d^4}$$

$$\rightarrow x_2 = L \Rightarrow \phi_2 = \phi_C = \frac{3ML}{\pi G d^4} + \frac{32ML}{\pi G d^4} = \frac{35ML}{\pi G d^4} = \phi_{\max}$$



EX2 | La masse $m = \rho V = \rho S L$

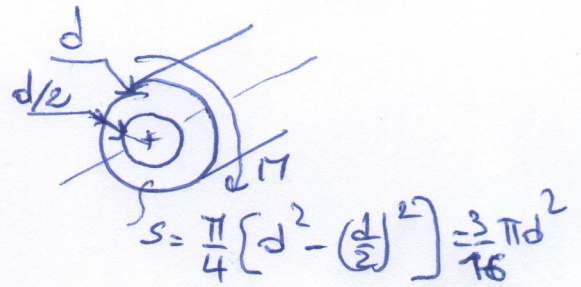
Barre pleine



$$m_1 = \rho L_1 S_1 = \rho L S = \rho L \frac{\pi d^2}{4}$$

$$m_1 = \frac{\pi}{4} \rho L d^2$$

Barre creuse



$$m_2 = \rho_2 L_2 S_2 = \rho L \frac{3}{16} \pi d^2$$

$$m_2 = \frac{3}{4} \left[\frac{\pi}{4} \rho L d^2 \right] = \frac{3}{4} m_1$$

La masse est réduite de 25%

La contrainte de torsion $\tau_t = \frac{M_t}{I_p} \rho$ avec $\rho = \frac{d}{2}$

$$\tau_{t1} = \frac{M_{t1}}{I_{p1}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M}{\frac{\pi d^4}{32}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{16}{\pi} \frac{M}{d^3}$$

$$\tau_{t1} = \frac{16M}{\pi d^3}$$

$$\tau_{t2} = \frac{M_{t2}}{I_{p2}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M}{\frac{\pi}{32} [d^4 - (\frac{d}{2})^4]} \cdot \frac{d}{2}$$

$$\tau_{t2} = \frac{16}{15} \times \frac{16M}{\pi d^3} = \frac{16}{15} \tau_{t1}$$

La contrainte a augmenté de $\frac{1}{15} \Rightarrow$ de 7%

L'angle de torsion $\phi = \frac{M_t \cdot L}{G I_p}$

$$\phi_1 = \frac{M_t L}{G I_{p1}} = \frac{M \cdot L}{G \frac{\pi d^4}{32}} = \frac{32 M L}{\pi G d^4}$$

$$\phi_1 = \frac{32 M}{\pi G d^4}$$

$$\phi_2 = \frac{M_t L}{G I_{p2}} = \frac{M \cdot L}{G \cdot \frac{\pi}{32} [d^4 - (\frac{d}{2})^4]}$$

$$\phi_2 = \frac{16}{15} \times \frac{32 M L}{\pi G d^4}$$

$$\phi_2 = \frac{16}{15} \phi_1$$

L'angle de torsion a augmenté de $\frac{1}{15} \rightarrow$ 7%

Conclusion: Compromis de la légèreté face à l'augmentation de la contrainte et l'angle de torsion \Rightarrow Optimisation: légèreté = résistance.

EX3 | Conditions de résistance :

$$\begin{cases} \sigma \leq [\sigma] \\ \phi \leq [\phi] \text{ (rd)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{M_t}{W_t} \leq [\sigma] \\ \frac{M_t \cdot L}{G I_0} \leq [\phi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_t \geq \frac{M_t}{[\sigma]} \\ \frac{M_t \cdot L}{G \frac{\pi d^4}{32}} \leq [\phi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi d^3}{16} \geq \frac{M_t}{[\sigma]} \\ \frac{\pi d^4}{32} \geq \frac{M_t \cdot L}{G [\phi]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_\sigma \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi [\sigma]}} \quad (1) \\ d_\phi \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_t \cdot L}{\pi G [\phi]}} \quad (2) \end{cases}$$

Les 2 conditions de résistance doivent être satisfaites. \rightarrow

$$d = d_{\max} \{ d_\sigma, d_\phi \}$$

EX4 | $M_t = \frac{P}{\omega} \left(= \frac{P}{\frac{2\pi N}{60}} = \frac{P}{\frac{\pi N}{30}} \right)$ si N est le nombre de tours/mn

on donne $\omega = 80 \text{ rad/s} \Rightarrow$

$$M_t = \frac{60 \cdot 10^3}{80} = 750 \text{ N.m} \quad (= 750 \cdot 10^3 \text{ N.mm})$$

$$G = 0,4 E = 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$[\phi'] = \frac{[\phi]}{L} \text{ (rd/m)} \Rightarrow d_\phi \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_t}{\pi G \cdot [\phi']}}$$

même raisonnement que l'EX3

EX5 | même raisonnement que l'EX1

$$\begin{cases} M_{t1} = 20 \text{ kN.m} \\ \sigma_{t1} = 30,2 \text{ MPa} \\ \phi_1 = \begin{cases} \phi_A = 0 \\ \phi_B = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ rd} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{t2} = 20 \text{ kN.m} \\ \sigma_{t2} = 3,8 \text{ MPa} \\ \phi_2 = \begin{cases} \phi_B = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ rd} \\ \phi_C = \phi_B + \frac{32 M_{t2}}{\pi G d_2^4} = 12,8 \cdot 10^{-3} \text{ rd} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{t3} = 20 \text{ kN.m} \\ \sigma_{t3} = 102 \text{ MPa} \\ \phi_3 = \begin{cases} \phi_C = 12,8 \cdot 10^{-3} \text{ rd} \\ \phi_D = \phi_C + \frac{32 M_{t3}}{\pi G d_3^4} = 0,114 \text{ rd} \end{cases} \end{cases}$$

EX6 | même méthode avec les diagrammes, comme EX1