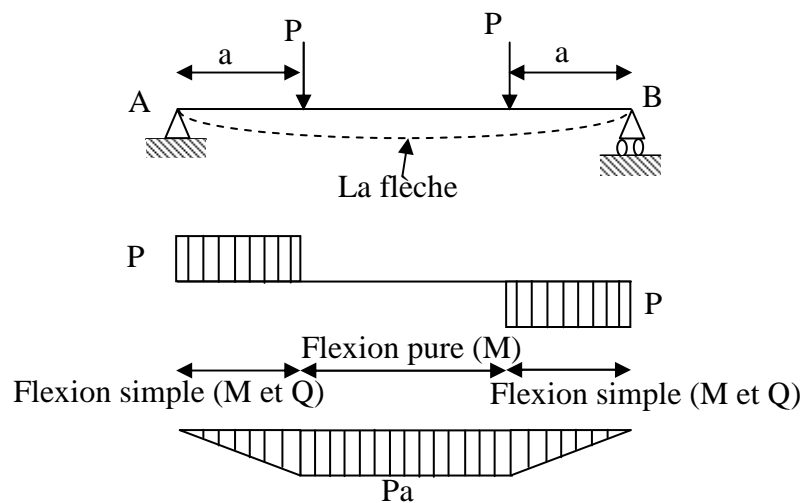


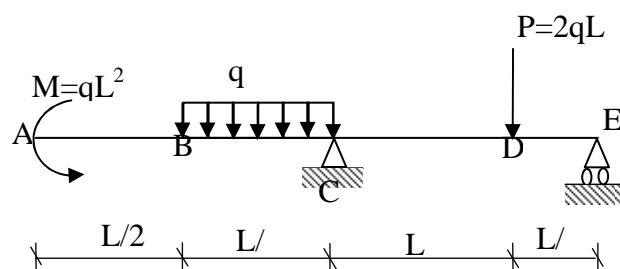
IV.1) GENERALITES

L'action des forces latérales sur une poutre se traduit en une déformation de l'axe longitudinal initialement droit en une courbe curviligne. L'état d'une section de poutre où de toutes les composantes des efforts internes, seule un moment fléchissant M_y ou M_z n'est pas nul, est dit état de flexion plane pure. La déformation résultante de ce genre de sollicitation est connue sous le nom de la flèche. Lorsque l'effort tranchant n'est pas nul, en ce cas la sollicitation est dite flexion simple.



IV.1.1) Définition

Une poutre est dite en flexion lorsqu'elle est soumise à des forces ainsi que des couples se trouvant dans un plan contenant l'axe longitudinal de la poutre. Ces forces agissent perpendiculairement à l'axe longitudinal et le plan contenant les forces est un plan de symétrie de la poutre.



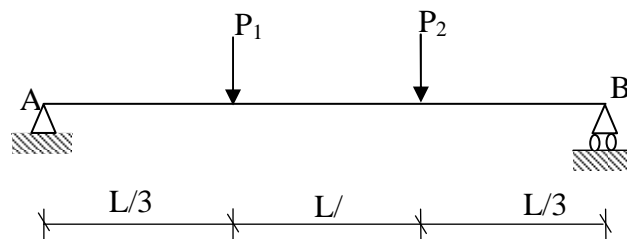
IV.2) EFFORTS TRANCHANTS ET MOMENTS FLECHISSANT

La construction des diagrammes des éléments de réduction constitue une étape essentielle dans toute étude de *RDM*. Un diagramme est un graphe qui indique la valeur (intensité et nature) de la sollicitation considérée dans toutes les sections du système étudié.

Les diagrammes des éléments de réduction permettent de localiser les sections les plus sollicitées (sièges des contraintes les plus élevées) et servent au dimensionnement des différents éléments des structures.

Dans la construction des diagrammes, les valeurs positives et négatives sont portées de part et d'autre d'un axe-origine. Par ailleurs, pour le diagramme du moment fléchissant, on a pour habitude de porter les ordonnées toujours du côté des fibres tendues.

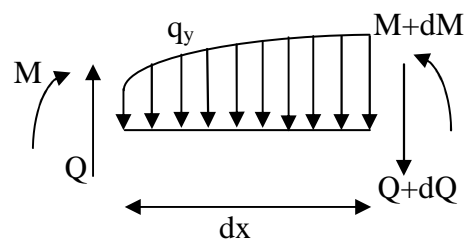
Considérons une poutre en appui simple soumise à des efforts verticaux P_1 et P_2 . On suppose que la poutre possède un plan de symétrie axial tel que les poutres circulaire, rectangulaire et des profilé en T , I et $U...$



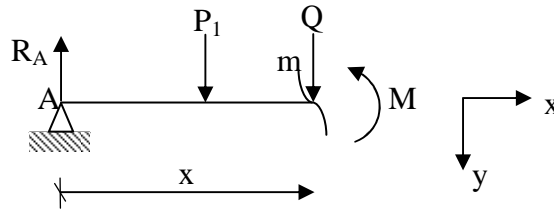
Pour déterminer les expressions du moment fléchissant et de l'effort tranchant, on suppose que la poutre AB est devisée en deux parties par la section droite (mn) située à une distance x du support gauche « A » et la partie de la poutre à la droite de (mn) est retirée.

Pour pouvoir tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant, il faut respecter les directions suivantes:

- ✓ Effort tranchant positif du haut vers le bas
- ✓ Moment fléchissant positif dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.



Pour étudier l'équilibre du tronçon de gauche de la poutre, on doit tenir compte non seulement des efforts externes tel que les charges P_1 et les réactions R_A , mais aussi des efforts internes, réparties sur la section droite (mn) et qui représentent l'action du tronçon droit de la poutre sur le tronçon gauche.



Le système de forces peut être remplacé par une résultante égale à la somme algébrique des forces données et par un couple.

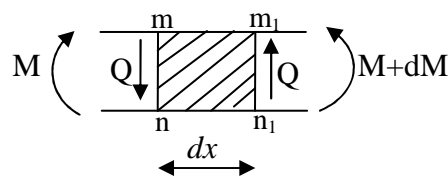
Dans notre cas on remplace les efforts P_2 et R_B par une force verticale Q agissant dans le plan de section (mn) et par un couple M_f .

L'effort tranchant Q et le moment fléchissant M_f qui agissent dans cette section, sont donnés par les relations suivantes:

$$Q = R_A - P_1$$

$$M_f = R_A x - P_1 \left(x - \frac{L}{3} \right)$$

Pour exprimer la relation entre moment flechissant dans la section (mn) on considère un élément pris entre deux section très voisines (mn) et (m_1n_2) :



$$\sum M /_{(mn)} = 0 \quad \Rightarrow \quad M + dM - M + Qdx = 0$$

$$\Rightarrow Q = -\frac{dM}{dx}$$

IV.3) DIAGRAMME DU MOMENT FLECHISSANT ET DE L'EFFORT TRANCHANT

Dans le cas général des poutres sollicitées transversalement dans un plan de symétrie, les contraintes réparties sur une section de poutre équilibre l'effort tranchant et le moment fléchissant en cette section. On détermine d'abord les contraintes dues au moment fléchissant appelées contraintes normales de flexions et en suite les contraintes tangentielle (contraintes de cisaillement) produites par l'effort tranchant.

La représentation graphique de la variation du moment fléchissant et de l'effort tranchant simplifie l'étude des contraintes dans une poutre.

a) Cas d'une force concentré à mi-travée

Détermination des réactions :

$$\sum M /_A = 0 \Rightarrow R_B = 0.5P$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow R_A = 0.5P$$

Expressions des efforts internes :

Tronçon I : $0 \leq x \leq L/2$

$$N = 0$$

$$Q - 0,5P = 0 \Rightarrow Q = 0,5P$$

$$M - 0,5Px = 0 \Rightarrow M = 0,5Px$$

$$M(0) = 0 \text{ et } M(0,5L) = \frac{PL}{4}$$

Tronçon II : $L/2 \leq x \leq L$

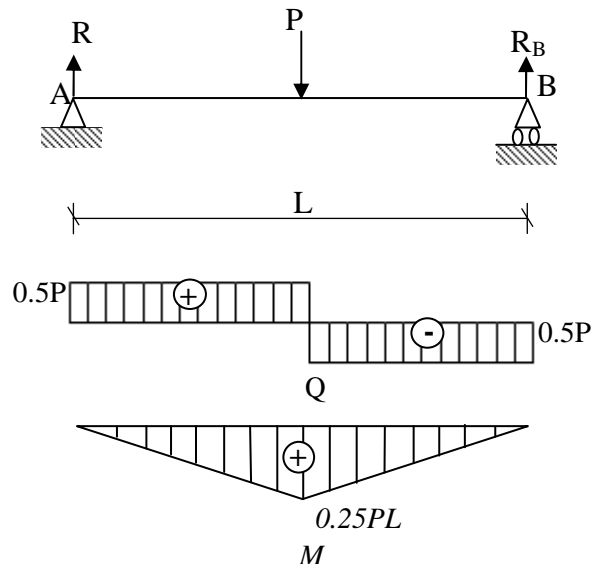
$$N = 0$$

$$Q + P - 0,5P = 0 \Rightarrow Q = -0,5P$$

$$M - 0,5Px + P\left(x - \frac{L}{2}\right) = 0$$

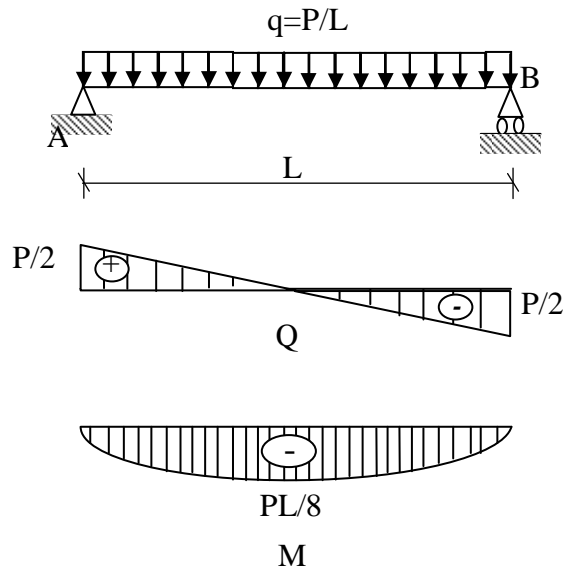
$$\Rightarrow M = 0,5Px - P\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

$$M(0) = 0, \quad M(L) = 0 \text{ et } M_{\max} = M(0,5L) = \frac{PL}{4}$$



b) Cas d'une charge uniformément répartie avec $q=P/L$

Détermination des réactions



$$\sum M /_A = 0 \Rightarrow R_B L - (P/L)L(L/2) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 0.5P$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow R_A + R_B - (P/L)L = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 0.5P$$

Expression des efforts internes :

$$N = 0$$

$$Q - 0,5P + \left(\frac{P}{L}\right)x = 0$$

$$\Rightarrow Q = 0,5P - \left(\frac{P}{L}\right)x = 0$$

$$Q(0) = 0,5P, \quad Q(L) = -0,5P$$

$$\text{Et } Q(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}$$

$$M - 0,5Px + 0,5\left(\frac{P}{L}\right)x^2 = 0$$

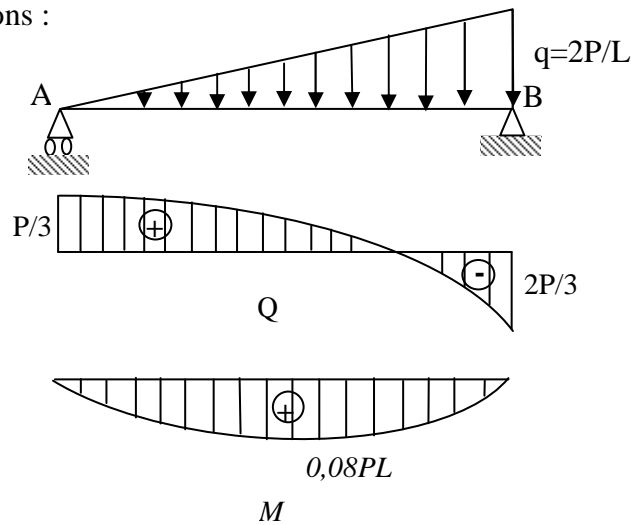
$$\Rightarrow M = 0,5Px - 0,5\left(\frac{P}{L}\right)x^2 = 0$$

$$M(0) = 0, \quad M(L) = 0$$

$$M_{\max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL}{8}$$

c) Cas d'une charge triangulaire répartie $q=2P/L$

Détermination de réactions :



$$\sum M /_A = 0 \Rightarrow R_B L - q(L/2)(2L/3) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = qL/3 = (2/3)P$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow R_A + R_B - qL/2 = 0$$

$$\Rightarrow R_A = qL/6 = P/3$$

Expression des efforts internes :

$$N = 0$$

$$Q - \frac{P}{3} + q \frac{x}{L} \frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow Q = \frac{P}{3} - \frac{qx^2}{2L} = \frac{P}{3} - \frac{Px^2}{L^2}$$

$$Q(0) = P/3, \quad Q(L) = -2P/3$$

$$\Rightarrow Q(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$M - \frac{P}{3}x + qx \frac{x}{L} \frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{P}{3}x - \frac{qx^3}{6L} = \frac{P}{3}x - \frac{Px^3}{3L^2}$$

$$M(0) = 0, \quad M(L) = 0, \quad M_{\max} \left(\frac{L}{\sqrt{3}} \right) = 0.08PL$$

IV.4) EQUATION DIFFERENTIELLE DE LA LIGNE ELASTIQUE

Dans toute étude de structure, outre le calcul des réactions, des éléments de réduction et des contraintes, on fait également des calculs de déplacements. Généralement, on fixe pour les déplacements des sections des limites admissibles à ne pas dépasser, tout comme pour les

contraintes. Il n'est pas rare même que les conditions de déformabilité soient plus sévères que les conditions de résistance.

La limitation des déplacements vise avant tout à préserver la fonctionnalité de la construction. A titre d'exemple, une trop grande déformabilité des poutres peut provoquer la fissuration des cloisons légères et engendrer des désordres très gênants.

D'autre part, lorsque les déplacements sont importants ils peuvent modifier significativement l'action des charges appliquées (ils engendrent d'autres efforts, dits effets du second ordre), et dans ce cas il est nécessaire d'en tenir compte.

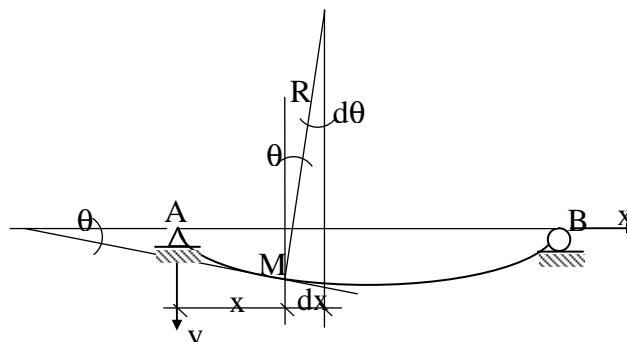
Dans le cas d'une poutre horizontale fléchie dans le plan xy , l'axe des x étant confondu avec l'axe longitudinal de la pièce, les déplacements verticaux des centres de gravité des sections droites, mesurés à partir de l'axe x , sont appelés flèches. Les rotations se font autour de l'axe z (axe neutre) et représentent les angles, mesurés en radians, dont tournent les sections droites de la poutre.

IV.4.1) Équation différentielle de la déformée

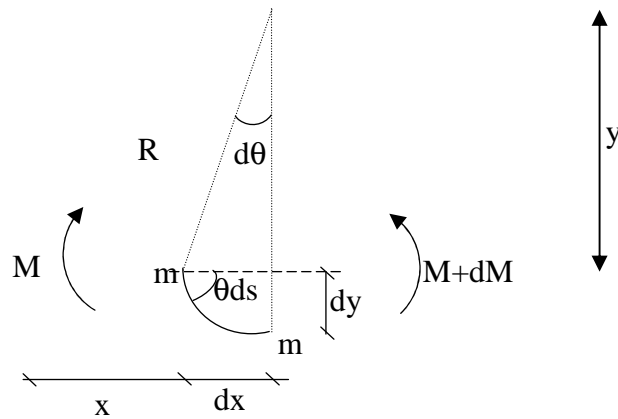
Considérons une poutre horizontale simplement appuyée, fléchie dans le plan vertical xy . Après flexion, l'axe longitudinal AB de la poutre prend la forme courbe AMB . Cette courbe est appelée *déformée* ou *ligne élastique* (ou *élastique* tout simplement) de la poutre et peut être décrite par une équation de la forme $y = f(x)$. Les ordonnées y représentant les flèches subies par les sections (leurs centres de gravité plus exactement) de la pièce.

Nous admettrons que la courbure de la ligne élastique en un point donné ne dépend que de la valeur du moment fléchissant en ce point. Dans ce cas, nous utilisons la relation liant la courbure au moment fléchissant obtenue rigoureusement dans le cas de la flexion pure et qui s'écrit :

$$\frac{1}{R} = -\frac{M_z}{EI_z}$$



Afin d'étudier la déformation de cette poutre, on prend en élément (mm_1)



$$\frac{I}{R} = \varepsilon \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{IV.2})$$

Le facteur ε vaut ± 1 et a été introduit pour des raisons que nous évoquons plus loin. Remarquons toutefois que du point de vue mathématique ε vaut $+1$ et le signe de la courbure ne dépend que de la valeur de la dérivée seconde (le dénominateur de l'expression (IV.2) étant strictement positif). Ainsi, la courbure (ou la dérivée seconde) est positive si la concavité de la courbe est tournée vers les y positifs et elle est négative quand la concavité est orientée vers les y négatifs (Figure IV.2).

A partir des équations (IV.1) et (IV.2), on déduit la relation différentielle suivante reliant le moment (M_z) et la flèche (y).

$$\frac{M_z}{EI_z} = \varepsilon \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{IV.3})$$

Physiquement, la dérivée première $y' = \frac{dy}{dx}$ représente la pente de la tangente à la déformée y au point courant M . Dans le cadre de l'hypothèse admise des petits déplacements, les angles sont très petits et, non seulement on peut confondre la tangente et l'angle $dy/dx = \tan \theta \approx \theta$, mais le terme $(dy/dx)^2$ devient négligeable devant l'unité. D'où la simplification de la relation (IV.3) :

$$\frac{M_z}{EI_z} = \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon y'' \quad (\text{IV.4a})$$

Notons au passage que dans le cadre des petits déplacements, y' représente également la rotation de la section Σ d'abscisse x .

La valeur à donner à ε se déduit plus facilement de la dernière expression. Il suffit de comparer les signes de y'' et de M_z . La convention de signes adoptée pour le moment est exactement l'opposée de celle de y'' puisqu'on considère un moment comme positif quand la concavité de la déformée est tournée vers les y négatifs.

D'où le signe adéquat à prendre :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = -\frac{M_z}{EI_z} \quad \text{Ou encore : } EI_z y'' = -M_z \quad (\text{IV.4b})$$

Compte tenu des relations différentielles reliant q , Q et M , on peut en déduire :

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = y''' = -\frac{Q_y}{EI_z} \quad \text{et} \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = y^{IV} = \frac{q_y}{EI_z} = \frac{q}{EI_z} \quad (\text{IV.5})$$

Il importe de noter que dans le cas des barres très élancées, les flèches peuvent être importantes et l'expression (IV.4b) ne fournit plus une bonne approximation. Il faut alors faire usage de la relation (IV.3), sachant que ε vaut -1 pour les raisons données plus haut. L'utilisation de la définition exacte de la courbure introduit deux différences fondamentales par rapport à l'approximation (IV.4) :

- L'équation différentielle n'est plus linéaire,
- Dans le calcul du moment, il faut tenir compte de l'influence des déplacements, ce qui revient à introduire des moments additionnels secondaires (*moments du second ordre*).

D'autre part, la relation (IV.1) montre qu'il y a proportionnalité entre la courbure et le moment fléchissant, autrement dit les développements à partir de cette équation sont valables uniquement dans le domaine élastique linéaire. Si on sort de ce domaine, il faut utiliser une relation non linéaire de la forme $1/R = f(M)$, déduite de l'étude du comportement élasto-plastique de la pièce considérée.

Nous allons voir dans les paragraphes suivants quelques méthodes parmi les plus importantes qui permettent d'obtenir l'équation de la ligne élastique d'une poutre fléchie.

IV.5) CONTRAINTES NORMALES EN FLEXION PLANE

Des contraintes normales se développent dans les sections transversales d'une poutre soumise à un moment fléchissant. La figure montre les fibres tendues et comprimées externes d'un tronçon de poutre fléchi. Dans la zone comprimée les fibres se raccourcissent tandis que dans la zone de traction elles s'allongent. Ces deux zones sont séparées par un plan neutre ayant un

rayon de courbure R et dont la longueur ne varie pas lors de la flexion. L'allongement relatif d'une fibre se trouvant à une distance y de l'axe neutre peut être écrit:

$$\varepsilon = \frac{a'b'}{ab} = \frac{(R+y)d\theta - dx}{dx}$$

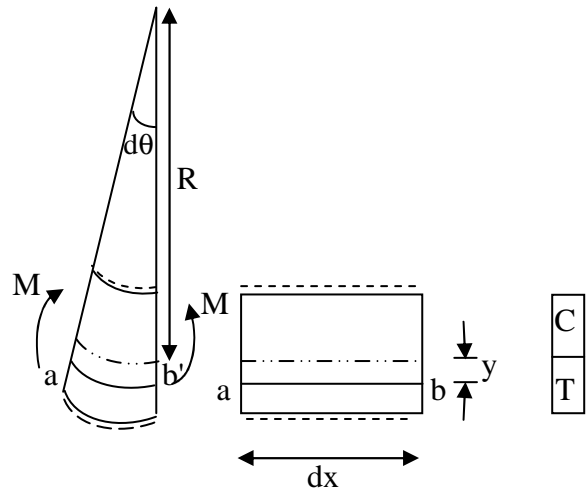
Avec :

$$dx = Rd\theta$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{y}{R}$$

$$\text{On a : } \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\text{Donc : } \sigma = \frac{E}{R} y$$



La condition d'équilibre qui lie les contraintes et les efforts internes dans la section transversale d'une poutre est :

$$\iint_s \sigma y ds = M$$

En introduisant la valeur de σ dans l'expression du moment, on obtient :

$$M = \iint_s \frac{E}{R} y^2 ds$$

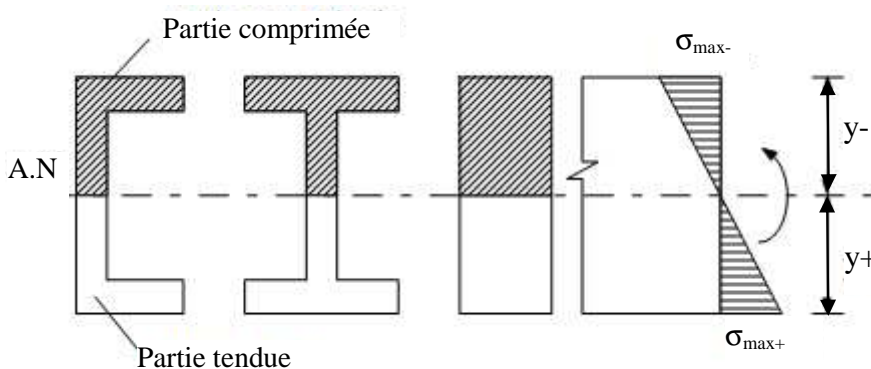
$$M = \frac{E}{R} \iint_s y^2 ds$$

$$M = \frac{E}{R} I_z$$

En remplaçant R par sa valeur, la contrainte normale en tout point de la section de la poutre distante de y de l'axe x a pour valeur:

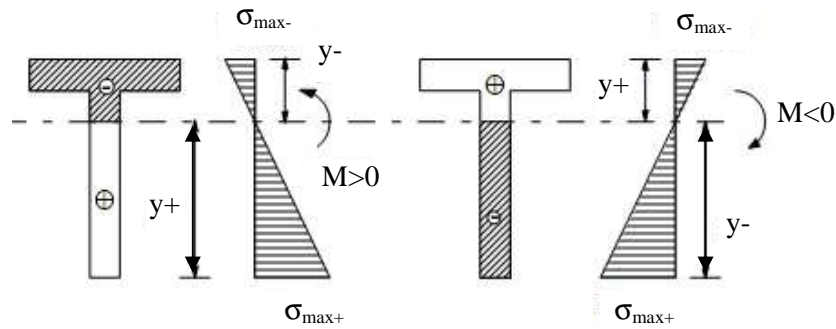
$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

1- Cas d'une section ayant un axe de symétrie horizontal



2- Cas d'une section n'ayant pas un axe de symétrie horizontal

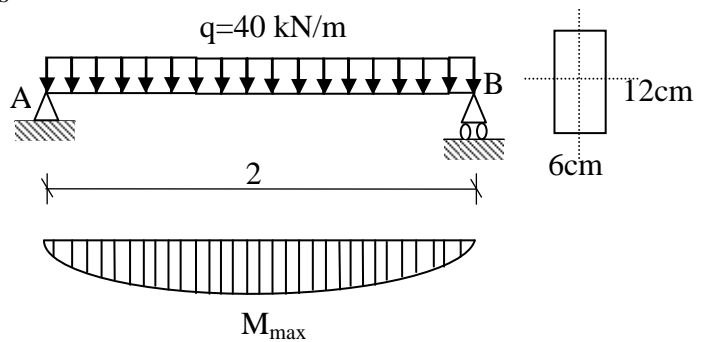
Dans ce cas les contraintes de traction et de compression maximales sont différentes



Exercice 1 :

Vérifier la résistance de la poutre ci-dessous si la contrainte admissible $[\sigma]=160 \text{ N/mm}^2$.

- Construire le diagramme des moments
- Déterminer la section dangereuse
- calculer la contrainte maximale
- compare cette contrainte avec $[\sigma]$.



Solution

Le moment maximal est à mi-travée :

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = 20 \text{ kNm}$$

$$I_z = \frac{60 \cdot 120^3}{12} = 860 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

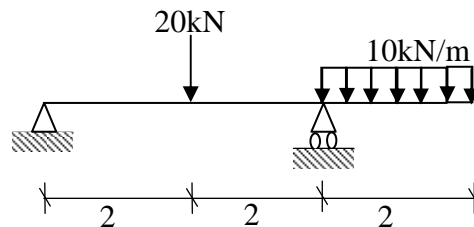
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 60}{864 \cdot 10^4} = 138,8 \text{ N/mm}^2 < 160 \text{ N/mm}^2$$

Exercice 2:

$$I_z = 2 \cdot 10^6 \text{ mm}^4, \quad [\sigma_-] = 80 \text{ N/mm}^2$$

$$h = 106 \text{ mm}, \quad [\sigma_+] = 120 \text{ N/mm}^2$$

$$y_G = 60 \text{ mm}$$

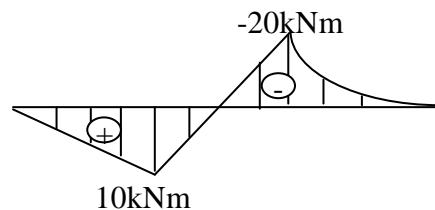


Solution

Diagramme des moments

$$\Rightarrow M_{\max}^+ = 10 \text{ kNm}$$

$$M_{\max}^- = 20 \text{ kNm}$$



-contraintes :

Pour $M_{\max}^+ = 10 \text{ kNm}$

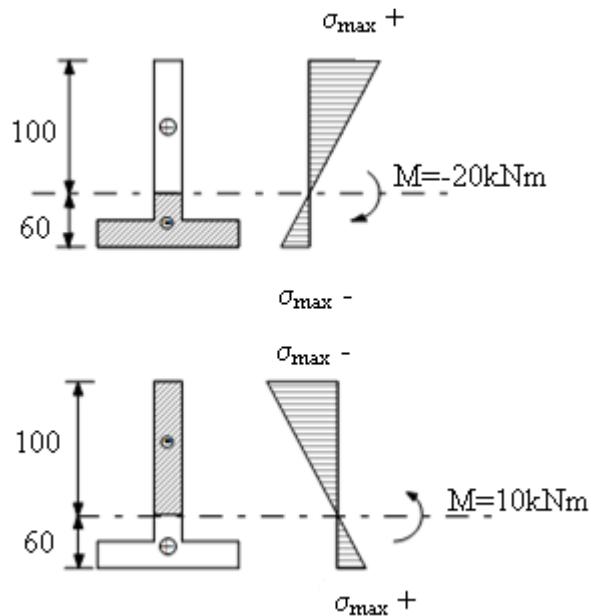
$$\sigma_{\max}^+ = \frac{10 \cdot 10^5 \cdot 60}{2 \cdot 10^6} = 30 \text{ N/mm}^2 < 120$$

Et pour $M_{\max}^- = 20 \text{ kNm}$

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{20 \cdot 10^5 \cdot 100}{2 \cdot 10^6} = 100 \text{ N/mm}^2 < 120$$

$$|\sigma_{\max}^-| = \frac{20 \cdot 10^5 \cdot 60}{2 \cdot 10^6} = 60 \text{ N/mm}^2 < [\sigma_-]$$

$$|\sigma_{\max}^-| = \frac{10 \cdot 10^5 \cdot 100}{2 \cdot 10^6} = 50 \text{ N/mm}^2 < [\sigma_-]$$

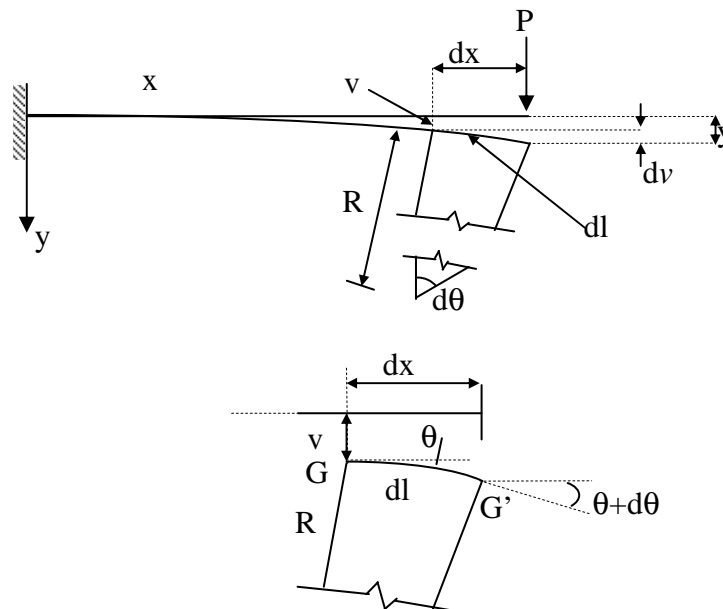


IV.7) EQUATION DE LA FLECHE

Quand on charge une poutre, la ligne moyenne qui, initialement est droite, se déforme sous l'effet d'un moment fléchissant. L'allure de l'axe longitudinal de la poutre après flexion (déformé) est appelée ligne élastique. On s'intéresse au calcul des déformations élastiques à la flexion pour pratiquement deux raisons :

- Calcul à la rigidité : en plus du calcul à la résistance, on doit parfois vérifier que la flèche de la poutre ne dépasse pas la valeur de la flèche maximale permise.
- Le calcul des déformations est essentiel pour l'analyse des systèmes hyperstatiques, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

L'expression de l'équation de la déformation peut être facilement obtenue à partir de la relation entre la courbure et le moment fléchissant:



Sachant initialement que:

$$\frac{1}{R} = \frac{M_z}{EI_z}$$

L'arc GG' ayant pour longueur dl :

$$dl = R d\theta$$

Ou :
$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dl}$$

La tangente de la courbure ν au point x est défini par :

$$\frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} \theta$$

Donc: $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

On peut écrire:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \frac{dy}{dx} \right) \frac{dx}{ds} \\ &= \frac{\frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{ds}}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{ds}}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}} \\ \frac{1}{R} &= -\frac{M}{EI} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{3/2}} \approx \frac{d^2 y}{dx^2} \\ \frac{dy}{dx} &\ll 1 \end{aligned}$$

Donc, on obtient finalement l'équation de la flèche de la forme:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M$$

IV.8) METHODE D'INTEGRATION DIRECTE

L'équation de la déformée peut être obtenue par intégration successive de l'équation différentielle. En intégrant une première fois on obtient l'équation de l'angle de rotation :

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \int -\frac{M(x)}{EI} dx + C_1$$

En intégrant une seconde fois il vient :

$$y(x) = \int \left[\int -\frac{M(x)}{EI} dx + C_1 \right] dx + C_2$$

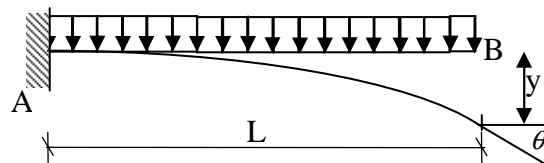
Où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions aux limites.

Il faut noter que dans le cas des poutres ayant plusieurs tronçons dont chacun possède sa propre équation du moment, il faut substituer l'expression de M dans chacune des équations différentielles et procéder à l'intégration. Les constantes d'intégration dans ce cas sont

déterminées en utilisant les conditions aux appuis des extrémités de la poutre et aux conditions de continuité aux limites des tronçons.

Exercice 3:

Déterminer l'expression de la déformée d'une console soumise à une charge uniformément répartie sur toute sa longueur.



$$M = -q \frac{x^2}{2}$$

$$EIy''(x) = -M = q \frac{x^2}{2}$$

$$EIy'(x) = EI\theta(x) = q \frac{x^3}{6} + C_1$$

$$EIy(x) = q \frac{x^4}{24} + C_1x + C_2$$

Condition aux limites

$$y'(L) = 0 = q \frac{L^3}{6} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -q \frac{L^3}{6}$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow q \frac{L^4}{24} - q \frac{L^4}{6} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{qL^4}{8}$$

$$\text{D'où } y = \frac{1}{EI} \left[\frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3}{6}x + \frac{qL^4}{8} \right] \text{ et } y'(x) = \theta(x) = \frac{1}{6EI} (qx^3 - qL^3)$$

$$\text{A l'extrémité libre } x=0 \Rightarrow \theta_{\max} = \frac{-qL^3}{6EI} \text{ et } y = \frac{qL^4}{8EI}$$

IV.9) METHODE DE LA POUTRE CONJUGUEE (FICTIVE)

La méthode d'intégration directe de l'équation différentielle de la ligne élastique qui est très efficace pour les poutres simples à un seul tronçon, devient laborieuse même pour une poutre à trois tronçons. Pour simplifier les calculs il est parfois utile de se servir d'autres méthodes, comme la méthode des paramètres initiaux ou la méthode grapho-analytique dite méthode de

la poutre conjuguée (fictive). Cette dernière est basée sur l'analogie qui existe entre l'équation différentielle de la déformée et celle qui lie le moment fléchissant à la charge répartie :

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \Leftrightarrow \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x)$$

Pour une poutre donnée, la méthode grapho-analytique consiste à considérer le diagramme des moments fléchissant comme une charge fictive répartie agissant sur une poutre fictive.

La flèche $y(x)$ et l'angle de rotation $\theta(x)$ de la poutre donnée sont déterminés respectivement par le rapport du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans une section x de la poutre fictive à la rigidité de la poutre donnée c'est-à-dire :

$$\theta(x) = \frac{Q_f(x)}{EI}$$

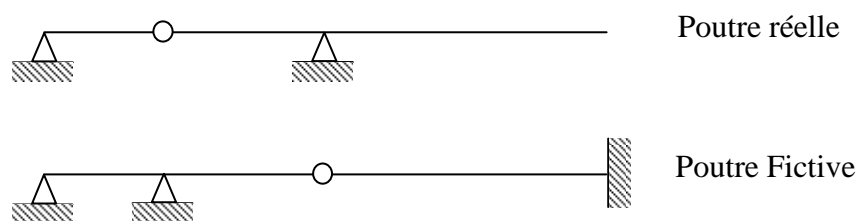
$$y(x) = \frac{M_f(x)}{EI}$$

Où $Q_f(x)$: l'effort tranchant de la poutre fictive

$M_f(x)$: moment fléchissant de la poutre fictive

Les règles de construction de la poutre fictive sont les suivantes :

- 1- Un appui à l'extrémité de la poutre réelle reste inchangé pour la poutre fictive.
- 2- Un appui intermédiaire de la poutre réelle est remplacé par une articulation dans la poutre fictive.
- 3- Une articulation de la poutre réelle devient un appui intermédiaire dans la poutre fictive.
- 4- L'encastrement de la poutre réelle est pris comme extrémité libre dans la poutre fictive.
- 5- Une extrémité libre de la poutre réelle devient un encastrement dans la poutre fictive.



Le diagramme positif du moment fléchissant de la poutre réelle agit sur la poutre fictive de haut en bas et le diagramme négatif du moment fléchissant de la poutre réelle agit sur la poutre fictive de bas en haut. Il faut noter aussi que cette méthode est efficace pour calculer les déplacements des sections particulières de la poutre, pourvu qu'il soit facile de déterminer les aires et les centres de gravité des diagrammes du moment fléchissant.

Exercice 4:

On donne P, L, E et I

- Déterminer θ_c, θ_A et y_A

- Déterminer la charge P pour que $y_{\max} \leq \frac{L}{300}$

Solution

Calcul des réactions :

$$\sum M_{A'} = 0$$

$$R_{C'}L + PL \frac{L}{2} = 0$$

$$\Rightarrow R_{C'} = -\frac{PL^2}{6} \Rightarrow T_{C'} = -R_{C'} = \frac{PL^2}{6}$$

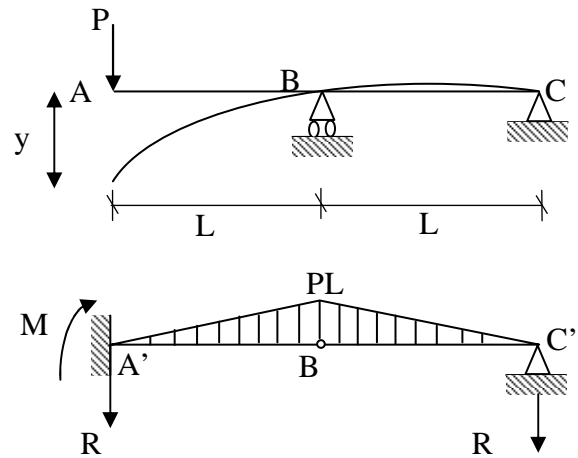
$$R_{A'} = -PLL + \frac{PL^2}{6} = \frac{-5PL^2}{6} \Rightarrow T_{A'} = R_{A'} = \frac{-5PL^2}{6}$$

$$M_{A'} = \frac{-PL^2}{6} 2L + PL^2 L = \frac{2}{3} PL^3$$

$$D'où \theta_A = \frac{T_{A'}}{EI} = \frac{-5PL^2}{6EI}$$

$$\theta_C = \frac{T_{C'}}{EI} = \frac{PL^2}{6EI}$$

$$y_{\max} = \frac{M_{A'}}{EI} = \frac{2PL^3}{3EI} \leq \frac{L}{1000} \Rightarrow P \leq \frac{EI}{2L^2}$$



Exercice 5:

Déterminer la flèche au point C et la rotation au point B de la poutre ci contre.

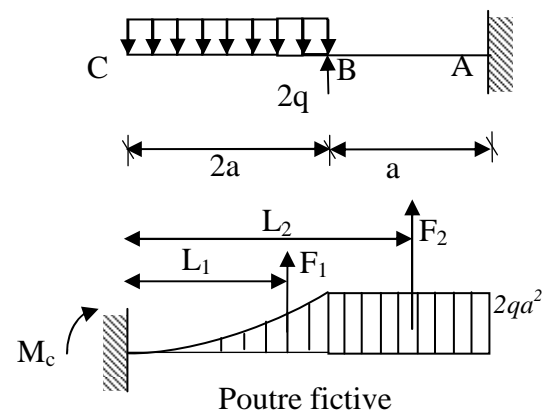
Solution :

On détermine les aires des diagrammes des moments de charge tronçon et les barres de levier par rapport à C.

$$F_1 = \frac{4}{3} qa^3$$

$$L_1 = \frac{3}{2} a$$

Le centre de gravité de la section 1 : $\left(\frac{3L}{4}, \frac{L}{4}\right)$



$$\text{L'aire de la section 1 : } \Omega = \frac{hL}{3}$$

$$F_2 = 2qa^3 \quad L_2 = \frac{5}{2}a$$

$$F_3 = qa^3 \quad L_3 = \frac{5}{2}a$$

$$M_c = \sum F_i L_i \Rightarrow y_c = \frac{7qa^4}{EI}$$

$$T_B = F_2 \Rightarrow \theta_B = \frac{2qa^3}{EI}$$

IV.10) METHODES DES PARAMETRES INITIAUX (MacAulay)

La méthode des paramètres initiaux est basée sur le principe de la fonction discontinue pour la détermination d'une expression unique du moment fléchissant d'une poutre de plusieurs tronçons. L'intégration directe de cette expression résulte en deux constantes $C_{10} = \theta$ et $C_{20} = y_0$ qui s'avèrent être les paramètres initiaux. Ainsi si on prend l'origine des coordonnées aux points situés à l'extrême gauche de la poutre, les expressions de $y(x)$ et $\theta(x)$ sont données par les équations :

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 + \sum M \frac{(x-a)}{1!} + \sum P \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q_c \frac{(x-c)^3}{3!} - \sum q_d \frac{(x-d)^3}{3!} + \sum q'_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q'_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \dots$$

$$EIy(x) = EIy_0 + EI\theta_0 x + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum P \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \sum q'_c \frac{(x-c)^5}{5!} - \sum q'_d \frac{(x-d)^5}{5!} + \dots$$

Où :

M : moments concentrés extérieurs ou à l'encastrement

a : distance entre l'origine des coordonnées et les points d'application des moments M

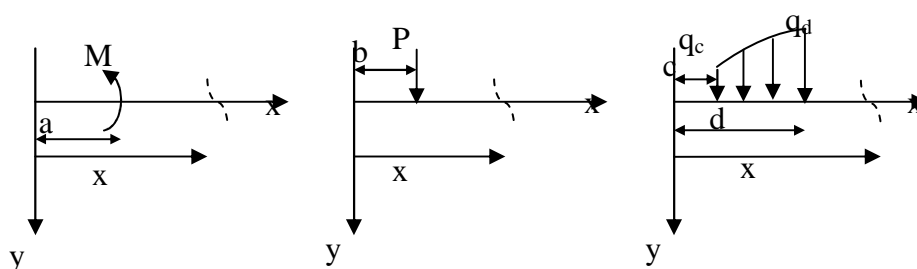
p : les forces concentrées y compris les réactions

b : distances entre l'origine des coordonnées et les points d'application des forces P

q_c, q_d : respectivement, les intensités au début et à la fin de la charge répartie

q'_c, q'_d : respectivement, les valeurs des dérivées de q aux points $x = c$ et $x = d$

Les directions des charges sont positives comme indiquées ci-dessous :



Les deux paramètres initiaux y_0 et θ_0 sont déterminés par les conditions d'appui de la poutre.

Exercice 6:

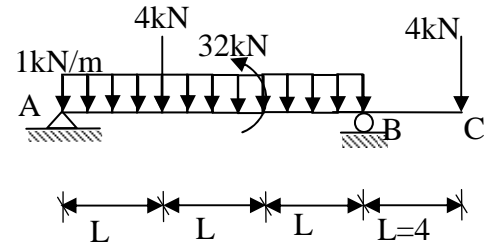
Déterminer la flèche maximale et les rotations aux appuis de la poutre représentée sur la figure ci-dessous.

Solution :

Par les équations de la statique on détermine les réactions aux appuis et on trouve :

$$R_A = 10kN$$

$$R_B = 10kN$$



$$EI\theta(x) = EI\theta_0 - \frac{10}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{(x-12)^3}{6} + 2(x-4)^2 + 32(x-8) - 5(x-12)^2$$

$$EIy(x) = EIy_0 + EI\theta_0 x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{x^4}{24} - \frac{(x-12)^4}{24} + \frac{2}{3}(x-4)^3 + 16(x-8)^2 - \frac{5}{3}(x-12)^3$$

$$EIy(0) = 0 \Rightarrow EIy_0 \Rightarrow y_0 = 0$$

$$EIy(12) = 0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{118,22}{EI}$$

$$\theta(0) = \theta_0 = \frac{118,22}{EI}$$

$$\theta(12) = \frac{57,78}{EI}$$

La flèche maximale :

$$\theta(x) = 0 \Rightarrow \text{Équation polynomiale de degré 3}$$

x	0	4	8	12	16
$EI\theta(x)$	118.22	48.89	-84.4	-57.78	-25.78

Donc $\theta(x) = 0$ pour $x \in]4,8[$

En utilisant la méthode de dichotomie, on converge vers $x = 5.48$

$$\Rightarrow y(5.48) = \frac{414}{EI}$$

IV.11) SUPERPOSITION DES DEFORMATIONS

Les équations différentielles de la déformée sont des équations linéaires c'est-à-dire tous les termes de y , y' et y'' sont du premier ordre. Les déformations dues à plusieurs cas de charges

peuvent être donc superposées ou cumulées. Cette méthode est surtout utilisée quand le chargement est composé de plusieurs cas de charge élémentaire ou les déformations sont données dans les aides mémoires de la RDM.

Exercice 7:

Déterminer la flèche maximale de la poutre ci-dessous.

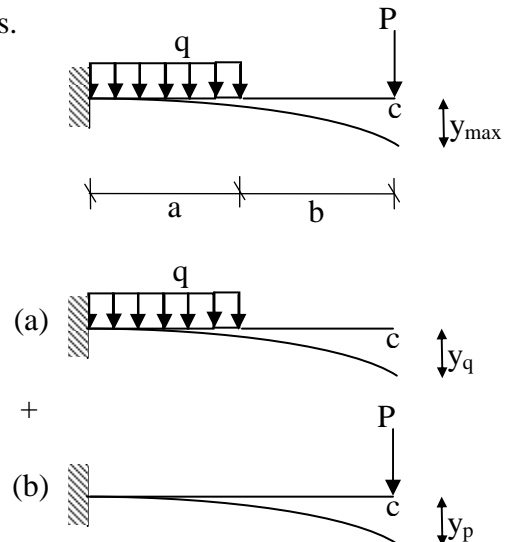
Solution

$$y_{\max} = y_q + y_p$$

$$y_q = \frac{qa^3(4L-a)}{24EI}$$

$$y_p = \frac{pL^3}{3EI}$$

$$y_{\max} = \frac{pL^3}{3EI} + \frac{qa^3(4L-a)}{24EI}$$



IV.12) QUELLE QUE EXEMPLE POUR DETERMINER EFFORTS ET FLECHES MAXIMALES

Les efforts liés à la flexion, c'est-à-dire le moment fléchissant et l'effort tranchant, sont souvent moins directs à déterminer que les efforts normaux. Il est donc intéressant de construire des abaques qui interviennent en amont du choix des sections, pour déterminer ces efforts, en fonction des situations types. Les données d'entrée de ces outils sont :

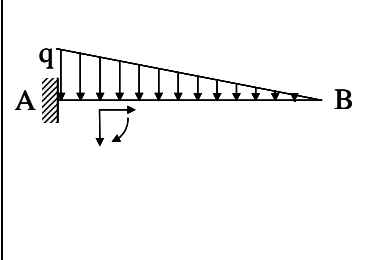
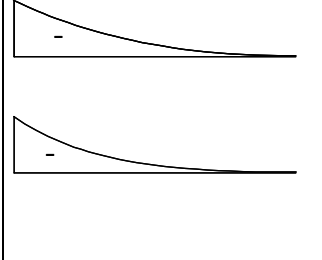
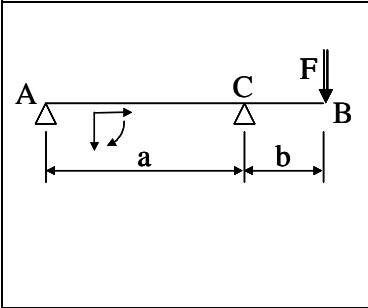
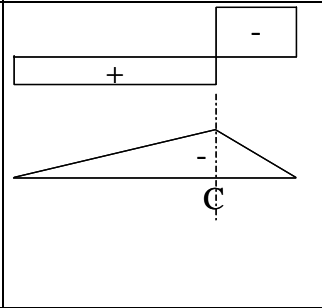
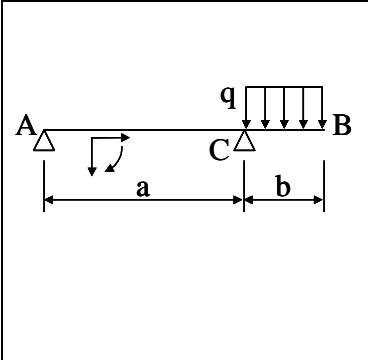
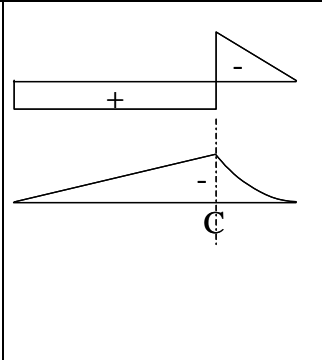
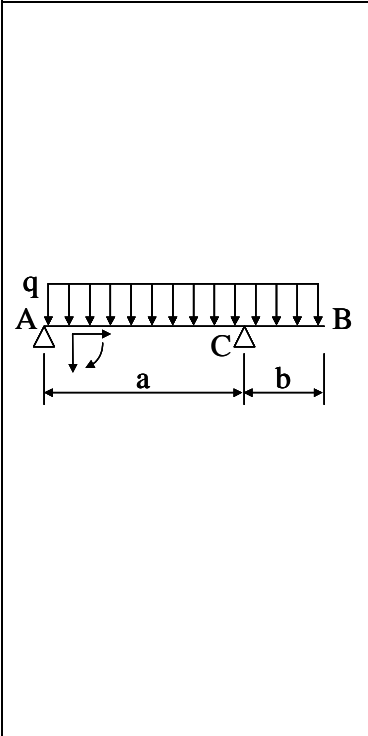
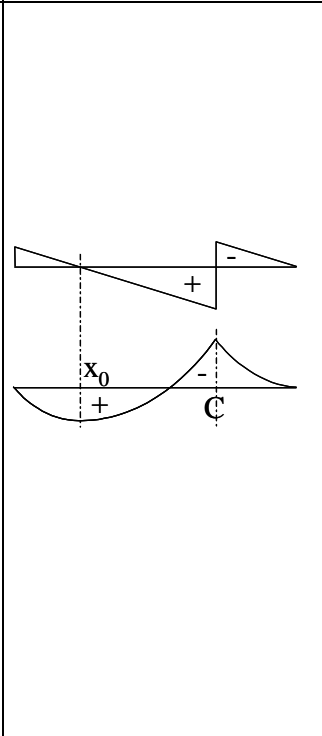
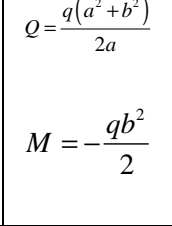
- La nature des appuis
- Les paramètres géométriques de la structure
- La nature et la position des charges

En sortie, on accède à des expressions pour les valeurs particulières des efforts et pour les flèches maximales, en fonction de l'intensité de la force, de l'inertie des sections, et du module d'élasticité du matériau.

Les tableaux suivants reprennent un certain nombre de situations courantes. Certains ouvrages proposent des tableaux plus complets, pour d'autres configurations de poutre simples ou continues sur n travées ou encore pour des portiques courants.

Configuration	Diagramme	Point	Effort	Flèche $Y_{max} =$
	 	A	$Q = \frac{-F}{2}$	$\text{En } x = \frac{L}{2}$ $\frac{FL^3}{48EI}$
		L/2	$M = \frac{FL}{4}$	
		B	$Q = \frac{F}{2}$	
	 	A	$Q = \frac{-qL}{2}$	$\text{En } x = \frac{L}{2}$ $\frac{5qL^4}{384EI}$
		L/2	$M = \frac{qL^2}{8}$	
		B	$Q = \frac{qL}{2}$	
	 	A	$Q = -F$	$\text{En } x = \frac{L}{2}$ $\frac{Fa(4a^2 - 3L^2)}{24EI}$
		C	$M = Fa$	
		D	$Q = F$	
	 	A	$Q = -\frac{qL}{4}$	$\text{En } x = \frac{L}{2}$ $\frac{qL^4}{120EI}$
		L/2	$M = \frac{qL^2}{12}$	
		B	$Q = \frac{qL}{4}$	
	 	A	$Q = \frac{C}{L}$	$\text{En } x = L - \frac{L}{\sqrt{3}}$ $\frac{2\sqrt{3}CL^2}{54EI}$
			$M = C$	

		A	$Q = F$	En $x = \frac{L}{2}$
		C	$M = -Fa$	$\frac{-Fab^2}{8EI}$
		D	$Q = -F$	En A et B $\frac{Fa^2(3b+2a)}{6EI}$
		Cg	$Q = qa$ $M = \frac{-qa^2}{2}$	En $x = \frac{L}{2}$ $\frac{qb^2(5b^2 - 24a^2)}{384EI}$
		Cd	$Q = q(a - 0,5L)$ $M = \frac{-qa^2}{2}$	En A, B : $\frac{qa(3a^3 + 6a^2b - b^3)}{24EI}$
		L/2	$M = \frac{q(b^2 - 4a^2)}{8}$	
		Dg	$Q = q(0,5L - a)$ $M = \frac{-qa^2}{2}$	
		Dd	$Q = -qa$ $M = \frac{-qa^2}{2}$	
		A	$Q = -F$ $M = -Fa$	En B $\frac{Fa^2(3L-a)}{6EI}$
		A	$T = -qL$ $M = \frac{-qL^2}{2}$	En B $\frac{qL^4}{8EI}$

		<p>A</p>	$Q = -\frac{qL}{2}$ $M = \frac{-qL^2}{6}$	<p>En B</p> $\frac{qL^4}{30EI}$
		<p>A</p>	$Q = \frac{Fb}{a}$	<p>En B</p> $\frac{FLb^2}{3EI}$
<p>C</p>	$M = -Fb$	<p>B</p>	$Q = -F$	
		<p>A</p>	$Q = \frac{qb^2}{2a}$	<p>En B</p> $\frac{qb^3(4a+3b)}{24EI}$
<p>C</p>	$M = \frac{-qb^2}{2}$	<p>Cd</p>	$Q = -qb$	
		<p>A</p>	$Q = \frac{q(b^2 - a^2)}{2a}$	<p>En B</p> $\frac{qbL(3b^2 + ab - a^2)}{24EI}$
<p>En</p>	$M = \frac{q(a^2 - b^2)^2}{8a^2}$	<p>Cg</p>	$Q = \frac{q(a^2 + b^2)}{2a}$ $M = -\frac{qb^2}{2}$	
$x_0 = \frac{a^2 - b^2}{2a}$		<p>Cd</p>	$Q = -qb$ $M = \frac{qb^2}{2}$	