Chapitre 1

Notions de Logique

1.1 Table de vérité

1.1.1 Proposition

Définition 1.1.1 *On appelle proposition (assertion) toute affirmation (énoncé) ayant un sens, et à laquelle on peut clairement attribuer la valeur « vrai » ou « faux ».*
Par exemple, « $1 \geq 3$ » est une proposition fausse, et « 17 est un nombre premier » est une proposition vraie.
Nous noterons par la suite $P, Q, R, \ldots$ des propositions.

1.1.2 Négation

Définition 1.1.2 *La négation de la proposition P, noté* ***nonP*** *ou $\overline{P}$, est la proposition qui affirme qu'elle est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.*
Par exemple, la négation de la proposition P : « $1 \geq 3$ » est nonP : « $1 < 3$ ».

1.1.3 Table de vérité

Définition 1.1.3 *En notant* ***1****(ou* ***V****) la valeur « vrai » et* ***0*** *(ou* ***F****) la valeur « faux », on peut résumer l'état d'une proposition* ***P*** *par une table de vérité comme suit :*

P	non P
1	0
0	1

ou

P	non P
V	F
F	V

Tab 1 : Table de vérité de **P** et **non P.**

1.2 Equivalence

Soient P et Q deux propositions.
On dit que P et Q sont équivalentes si elles ont les mêmes valeurs de vérité. On note "$P \Leftrightarrow Q$" qui se lit " P équivalent à Q"
la table de vérité de l'équivalence logique "$P \Leftrightarrow Q$" est

P	**Q**	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tab 2 : Table de vérité de ($\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{Q}$)

Propriété 1.1
Soit P une proposition, alors la négation de la négation de la proposition P est équivalente à P.

$$\left(\overline{\overline{P}}\right) \Leftrightarrow (P)$$

1.3 Les connecteurs "ET" , "OU"

1.3.1 La Conjonction «$\wedge$»

Soient P et Q deux propositions.
La proposition "P et Q" notée par "$P \wedge Q$" est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies et est fausse sinon.
On peut résumer l'état de proposition "$P \wedge Q$" par la table de vérité suivante :

P	**Q**	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ou

P	**Q**	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tab 3 : Table de vérité de $\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$

Propriété 1.2
Soit P une proposition, alors «$P \wedge \overline{P}$» est une proposition fausse.
Preuve il suffit de remarque que la table de vérités de $P \wedge \overline{P}$

P	$\overline{P}$	$P \wedge \overline{P}$
1	0	0
0	1	0

Tab 4 : Table de vérité de $P \wedge \overline{P}$

1.3.2 La disjonction «$\vee$»

Soient P et Q deux propositions.
La proposition "P ou Q" notée par "$P \vee Q$" est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie et est fausse sinon.
On peut résumer l'état de proposition "$P \vee Q$" par la table de vérité suivante :

P	**Q**	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ou

P	**Q**	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tab 5 : Table de vérité de $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$

Propriété 1.3
Soit P une proposition, alors «$P \vee \overline{P}$» est une proposition vraie.
Preuve il suffit de remarque que la table de vérités de $P \vee \overline{P}$

P	$\overline{P}$	$P \vee \overline{P}$
1	0	1
0	1	1

Tab 6 : Table de vérité de $P \vee \overline{P}$

Théorème 1.3.1 *(Règles de Morgan)*

Soient P et Q deux propositions, alors :

1. $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$.
2. $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

Preuve On établit la preuve de ces règles en donnant les valeurs de vérités des propositions logiques correspondantes.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1

On voit que les propositions $\overline{P \wedge Q}$ et $\overline{P} \vee \overline{Q}$ ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes. De même pour $\overline{P \vee Q}$ et $\overline{P} \wedge \overline{Q}$.

Théorème 1.3.2 *Soient P , Q et R deux propositions, alors :*

1. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ et $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$.
2. $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ et $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$.
3. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ et $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

(On dit que le «OU» et le «ET» sont commutatifs, associatifs et distributifs l'un sur l'autre).
Preuve
Démontrons par exemple la deuxième équivalence de 3 à l'aide d'une table de vérité (vous démontrerez le reste de manière analogue).

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

On lit effectivement les mêmes valeurs de vérité dans les quatrième et huitième colonnes.

1.4 Implication

Définition 1.4.1 *La proposition "$P \Rightarrow Q$ " est la proposition "nonP ou Q" qui se lit " P implique Q". Sa table de vérités est donnée par*

P	**Q**	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tab 7 : Table de vérité de $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$

Contraposée et réciproque

Soient P et Q deux propositions.

– La contraposée de l'implication «$P \Rightarrow Q$» est l'implication « $NonQ \Rightarrow NonP$».

– La réciproque de l'implication «$P \Rightarrow Q$» est l'implication « $Q \Rightarrow P$».

Propriété 1.4

Une implication et sa contraposée sont équivalentes.

$$(P \Rightarrow \ Q) \Leftrightarrow (\mathrm{Non}Q \Rightarrow \mathrm{Non}P)$$

Preuve On peut utiliser deux manière différentes.

1. En utilisant les valeurs de vérité des implications «$P \Rightarrow \ Q$» et «Non$Q$ $\Rightarrow$Non$P$», on obtient :

P	Q	Non$P$	Non$Q$	$P \Rightarrow \ Q$	Non$Q$ $\Rightarrow$Non$P$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Tab 8 : Table de vérité de $P \Rightarrow \ Q$ et $NonQ \Rightarrow NonP$

On voit que les propositions «$P \Rightarrow \ Q$» et «Non$Q$ $\Rightarrow$Non$P$» ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes.

2. En utilisant la définition de l'implication, on obtient :

$$(\mathrm{Non}Q \Rightarrow \mathrm{Non}P) \Leftrightarrow (\mathrm{Non}\,(\mathrm{Non}Q) \vee \mathrm{Non}P)$$

$$\Leftrightarrow (Q \vee \mathrm{Non}P)$$

$$\Leftrightarrow (P \Rightarrow \ Q)$$

Propriété 1.5

Soient P , Q et R deux propositions, alors :

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

Preuve Démontrons à l'aide d'une table de vérité.

P	Q	R	$\overbrace{P \Rightarrow Q}^{P_1}$	$\overbrace{Q \Rightarrow R}^{P_2}$	$\overbrace{P \Rightarrow R}^{P_3}$	$\overbrace{P_1 \wedge P_2}^{P_4}$	$P_4 \Rightarrow P_3$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Propriété 1.6
Soient P et Q deux propositions, alors :
La proposition "$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$" est la proposition notée par "$P \Leftrightarrow Q$"
Preuve
En utilisant la table de vérités suivante :

P	Q	$\overbrace{P \Rightarrow Q}^{P_1}$	$\overbrace{Q \Rightarrow P}^{P_2}$	$P_1 \wedge P_2$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

On voit que les propositions «$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$» et «$P \Leftrightarrow Q$» ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes.

1.5 CNS, SSI, Il faut et il suffit

Les expression «Condition nécessaire et suffisante (**C.N.S**)», «Si et seulement si (**SSI**)», «il faut et il suffit» signifient toutes « l'équivalance ».

$\Rightarrow$	$\Leftarrow$
Condition nécessaire Il faut Seulement si	Condition suffisante Il suffit Si

Considérons par exemple l'implication vraie :

$$(x+1)^2 = 4 \Leftarrow x+1 = 2.$$

Pour que $(x+1)^2$ soit égal à 4, il suffit que $x+1$ soit égal à 2, ou encore $(x+1)^2$ vaut 4 si $x+1$ vaut 2. Mais, pour que $(x+1)^2$ soit égal à 4, il n'est pas nécessaire, il n'est pas obligatoire que $x+1$ soit égal 2 (car $x+1$ peut aussi être égal à -2) ou encore l'égalité $(x+1)^2 = 4$ ne se produit pas seulement si $x+1$ vaut 2 (l'implication $(x+1)^2 = 4 \Rightarrow x+1 = 2$ est fausse).

1.6 Quantificateurs

On définit les deux symboles $\forall$ et $\exists$, appelés quantificateurs, de la manière suivante :

1.6.1 Quantificateur universel ($\forall$) : «Pour tout»

Une proposition P peut dépendre d'un paramètre x, par exemple «$x^2 + 2x \geq 0$», la proposition $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x.

La proposition « $\forall x \in E \quad P(x)$ » est vraie lorsque les propositions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.
On lit : «Pour tout (Quelque soit) x appartenant à E, $P(x)$ »
Exemple 1.1
– « $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^2 + 2x \geq 0$ » est une proposition fausse.
– « $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ » est une proposition vraie.

1.6.2 Quantificateur existentiel : «Il existe»

La proposition « $\exists x \in E \quad P(x)$ » est vraie lorsque l'on peut trouverau moins un x de E pour lequel $P(x)$ est vraie.
On lit : «Il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ »
Exemple 1.2
– « $\exists x \in \mathbb{R},\ \ x^2 + 2x \geq 0$ » est une proposition vraie.
– « $\exists z \in \mathbb{N},\ \ z^2 + 2 \neq 0$ » est une proposition fausse.
Remarque 1.1
La proposition : «Il existe un et un seul élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie» s'écrit en abrégé «$\exists! x \in E,\ P(x)$».

1.6.3 La négation des quantificateurs

La négation de « $\forall x \in E \quad P(x)$ » est « $\exists x \in E \quad nonP(x)$ » et La négation de « $\exists x \in E \quad P(x)$ » est « $\forall x \in E \quad nonP(x)$ ».
Exemple 1.3
– La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^2 + 2x \geq 0$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \ x^2 + 2x < 0$ ».
– La négation de « $\exists z \in \mathbb{N},\ \ z^2 + 2 \neq 0$ » est « $\forall z \in \mathbb{N},\ \ z^2 + 2 = 0$».
Remarque 1.1
On peut distribuer $\forall$ sur «ET» et $\exists$ sur «OU» mais on ne peut pas distribuer $\forall$ sur «OU» et $\exists$ sur «ET».

1. $(\forall x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))$.
2. $(\exists x \in E, P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x))$.
3. $(\forall x \in E, P(x) \vee Q(x)) \Leftarrow (\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))$.
4. $(\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x))$.

On peut permuter des quantificateurs de même nature mais on ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes.

1. $(\forall x \in E, \forall y \in E, P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in E, \forall x \in E, P(x, y))$.
2. $(\exists x \in E, \exists y \in E, P(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \in E, \exists x \in E, P(x, y))$.

1.7 Types de raisonnements

1.7.1 Raisonnement direct

Pour montrer que la proposition «$P \Rightarrow Q$» est vraie, on suppose que la proposition P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple 1.4

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que «si n est impair alors n^2 est impair».

Supposons que n est impair, alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$, Calculons alors n^2.

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$$

Donc, il existe un entier naturel $p = 2k^2 + 2k$ tel que $n^2 = 2p + 1$,ce qui montre que n^2 est impair.

1.7.2 Disjonction de cas

Si l'on souhaite vérifier une proposition $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E , on montre la proposition pour les x dans une partie A de E , puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de disjonction ou du cas par cas.

Exemple 1.5 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n + 1)$ est divisible par 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on peut distinguer deux cas

Premier cas : n est pair, $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

On a :

$$n(n + 1) = 2k(2k + 1) = 2k_1, \quad \textit{avec } k_1 = k(2k + 1) \in \mathbb{N}.$$

d'où $n(n + 1)$ est pair.

Deuxième cas : n est impair, $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

On a :

$$n(n + 1) = (2k + 1)(2k + 2) = 2k_2, \quad \textit{avec } k_2 = (k + 1)(2k + 1) \in \mathbb{N}.$$

d'où $n(n + 1)$ est pair.

On déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n + 1)$ est divisible par 2.

Exemple 1.6

Montrer que «Pour tout $x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq x^2 - x + 1$».

Soit $x \in \mathbb{R}$,

Premier cas : $x \geq 1$

$$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - (x-1)$$

$$= x^2 - 2x + 2$$

$$= (x+1)^2 + 1 \geq 0$$

et donc, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.
Deuxième cas : $x < 1$

$$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - (-x+1)$$

$$= x^2 \geq 0$$

et donc, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.
Conclusion : Dans tous les cas $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

1.7.3 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer «$P \Rightarrow Q$ » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction.

Exemple 1.7 :

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$, Montrer que : *si* $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$ *alors* $x = y$.

Supposons que $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$ et $x \neq y$ et on cherche une contraduction.

On a :

$$\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1} \Rightarrow x(x+1) = y(y+1)$$

$$\Rightarrow x^2 + x - y^2 - y = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)(x+y) + (x-y) = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)(x+y+1) = 0$$

$$\Rightarrow x + y + 1 = 0, \ car \ \ x - y \neq 0$$

$$\Rightarrow x + y = -1$$

Qui est impossible, car la somme de deux nombres positifs ne peut être négative.(On obtient une contradiction).

Alors, d'aprés le principe de raisonnement par absurde, on déduit que *si* $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$ *alors* $x = y$.

Exemple 1.8 :

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons que est rationnel. Alors

$$\sqrt{2} = \tfrac{p}{q}$$

avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$ et p et q sont premiers entre eux ($p\gcd(p,q) = 1$).

On a :

$$\sqrt{2} = \tfrac{p}{q} \Rightarrow 2 = \tfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

Commme $p^2 = 2q^2$ alors p^2 est pair, alors p est pair.

Comme p est pair, alors $\exists p_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2p_0$.

Donc

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow (2p_0)^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2p_0^2.$$

Commme $q^2 = 2p_0^2$ alors q^2 est pair, alors q est pair.

Comme q est pair, alors $\exists q_0 \in \mathbb{Z}^*$ tel que $q = 2q_0$.

Ce qui donne une contradiction, car $p\gcd(p,q) = 1$.

D'aprés le principe de raisonnement par absurde, on déduit que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1.7.4 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$$

Donc, pour mantrer que $P \Rightarrow Q$, on montre que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple 1.9

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que «si n^2 est pair alors n est pair».

On sait que «si n^2 est pair alors n est pair» équivalente à «si n est impair alors n^2 est impair».

Et comme la proposition «si n est impair alors n^2 est impair» est vraie (Voir l'exemple 1.4), alors d'aprés le principe de raisonnement par contraposée, on déduit que «si n^2 est pair alors n est pair».

Exemple 1.10 :

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$(a \neq 3 \ \ et \ \ b \neq 3) \Rightarrow (ab - 3a - 3b + 9 \neq 0)$$

Par contraposée, on démontre que

$$ab - 3a - 3b + 9 = 0 \Rightarrow (a = 3 \ ou \ b = 3)$$

On suppose que $ab - 3a - 3b + 9 = 0$, donc

$$ab - 3a - 3b + 9 = 0 \Rightarrow a(b-3) - 3(b-3) = 0$$

$$\Rightarrow (b-3)(a-3) = 0$$

$$\Rightarrow (a = 3 \quad ou \ \ b = 3)$$

Alors, d'aprés le principe de raisonnement par contaposée, on déduit que

$$(a \neq 3 \ et \ b \neq 3) \Rightarrow (ab - 3a - 3b + 9 \neq 0).$$

1.7.5 Contre exemple

Pour montrer qu'une proposition du type «$\forall x \in E \ \ P(x)$» est vraie, il faut montrer que pour chaque x de E, $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette proposition est fausse il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à la proposition «$\forall x \in E \ \ P(x)$».

Exemple 1.11

Montrer que la proposition «$\forall x \in \mathbb{C}, \ \ x^2 + 1 \neq 0$» est fausse.

Un contre exemple pour $x = i$ ou $x = -i$, on trouve $x^2 + 1 = 0$, ce qui montre que la proposition est fausse.

1.7.6 Récurrence

Leprincipe de récurrence permet de montrer qu'une proposition $P(n)$, dépendante de n, est vraie pour tout $n \geq n_0$ avec $n, n_0 \in \mathbb{N}$.

La démonstration par récurrence se déroule en 3 étapes :

- *Etape 1-**Initialisation** : On prouve que $P(n_0)$ est vraie*
- *Etape 2-**Héridété :** On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, on suppose que $P(n)$ vraie, et on démontre alors que la proposition $P(n+1)$ est vraie.*
- *Etape 3-**Conclusion :** On rappelle que, par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.*

Exemple 1.12

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Dans ce cas, on a : $n_0 = 1$ et la proposition $P(n)$ définie par $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Etape 1-Initialisation : On prouve que $P(n_0)$ est vraie

Pour $n = 1$, on a :
$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 = 1$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = 1.$
Donc, la proposition est vraie pour le rang n_0.
Etape 2-Héridêté : On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
Supposons que la proposition $P(n)$ est vraie c'est à dire $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et montrons que la proposition $P(n+1)$ est vraie c'est à dire $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n+1}{6}\left(n\left(2n+1\right) + 6\left(n+1\right)\right)$$

$$= \left(\frac{n+1}{6}\right)\left(2n^2 + 7n + 6\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Ce qui montre que la proposition $P(n+1)$ est vraie.
Etape 3-Conclusion : D'aprés le principe de raisonnement par récurrence la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Exemple 1.13 :

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

On décompose la démonstration en trois étapes :

(i) **Initialisation :** on prouve $P(n_0)$ avec $n_0 = 1$.

On a :

$$\sum_{k=1}^{n_0} k^3 = (1)^3 = 1$$

et

$$\frac{n_0^2(n_0+1)^2}{4} = \frac{(1)^2(1+1)^2}{4} = 1$$

Ce qui montre que $P(n_0)$ est vraie.

(ii) **Hérédité** :

On suppose que $P(n)$ vraie, c.à.d

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

et on démontre alors que la proposition $P(n+1)$ est vraie, c.à.d

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \underbrace{1^3 + 2^3 + ... + n^3}_{\sum_{k=1}^{n} k^3} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) \\
&= (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

d'où la proposition $P(n+1)$ est vraie

(iii) **Conclusion** : on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$.

D'aprés le principe de raisonnement par récurrence la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul.

1.8 Exercices

Exercice 1
Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes puis donner leurs négations.

1. f est majorée.
2. f est bornée.
3. f est croissante.
4. f est strictement décroissante.
5. f ne s'annule jamais.
6. f est inférieur à g.

Solution

- P_1 :«f est majorée»

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}; f(x) \leq M$$

Sa négation est :

$$\overline{P_1} : «\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}; f(x) > M»$$

- P_2 :«f est bornée»

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}; m \leq f(x) \leq M$$

ou

$$\exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}; |f(x)| \leq A$$

Sa négation est :

$$\overline{P_2} : «\forall m, M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}; (f(x) > M) \text{ ou } (f(x) < m)»$$

- P_3 :«f est croissante»

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

Sa négation est :

$$\overline{P_3} : «\exists a, b \in \mathbb{R}, (a \leq b) \wedge (f(a) > f(b))»$$

- P_4 :«f est strictement décroissante»

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

Sa négation est :

$$\overline{P_4} : «\exists a, b \in \mathbb{R}, (a < b) \wedge (f(a) \leq f(b))»$$

- P_5 :«f ne s'annule jamais»

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$$

Sa négation est :

$$\overline{P_5} : «\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0»$$

- P_6 :«f est inférieur à g»

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$$

Sa négation est : $\overline{P_6}$: «$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > g(x)$»

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, dire si la proposition est vraie ou fausse puis la nier :

1. $(\forall x \in \mathbb{R})$, $(2x \geq x)$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R})$, $(x > 0 \Rightarrow 2x \geq x)$
3. $(\exists x \in \mathbb{N})$,$(5x + 11 = 3x + 14)$.
4. $(2 + 6 = 5) \wedge (3 - 1 = 2)$.
5. $(2 + 6 = 5) \vee (3 - 1 = 2)$.
6. $(2 + 6 = 5) \Rightarrow (3 - 1 = 2)$.

7. $(\forall x \in \mathbb{C}), (x^2 + 1 \neq 0)$.

Solution :

Dans chacun des cas suivants, dire si la proposition est vraie ou fausse puis la nier :

1. La proposition P_1 : $(\forall x \in \mathbb{R}), (2x \geq x)$ est fausse, car il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $2x < x$ (on peut prendre par exemple $x \in]-\infty, 0[$).

Sa négation est
$$\overline{P_1} : (\exists x \in \mathbb{R}), (2x < x)$$

2. La proposition P_2 :$(\forall x \in \mathbb{R}), (x > 0 \Rightarrow 2x \geq x)$ est vraie, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \leq 0$ ou $2x \geq x$.

Sa négation est
$$\overline{P_2} : (\exists x \in \mathbb{R}), (x > 0 \wedge 2x < x)$$

3. La proposition P_3 :$(\exists x \in \mathbb{N})$,$(5x + 11 = 3x + 14)$ est fausse, car la solution de l'équation $5x + 11 = 3x + 14$ est $x = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$.

Sa négation est
$$\overline{P_3} : (\forall x \in \mathbb{N}), (5x + 11 \neq 3x + 14)$$

4. La proposition P_4 :$(2 + 6 = 5) \wedge (3 - 1 = 2)$ est fausse, car P_4 est une conjonction de deux proposition, V et F donne F.

Sa négation est
$$\overline{P_4} : (2 + 6 \neq 5) \vee (3 - 1 \neq 2)$$

5. La proposition P_5 :$(2 + 6 = 5) \vee (3 - 1 = 2)$ est fausse, car P_4 est une disjonction de deux proposition, V ou F donne V.

Sa négation est
$$\overline{P_5} : (2 + 6 \neq 5) \wedge (3 - 1 \neq 2)$$

6. La proposition P_6 :$(2+6=5\ ) \Rightarrow (3-1=2)$ est vraie.

Sa négation est

$$\overline{P_6} : (2+6=5) \wedge (3-1 \neq 2)$$

7. La proposition P_7 :$(\forall x \in \mathbb{C}\ ),\ (x^2+1 \neq 0)$ est fausse, car il existe $x = \pm i \in \mathbb{C}$ tel que $x^2+1=0$.

Sa négation

$$\overline{P_7} : (\exists x \in \mathbb{C}), (x^2+1=0)$$

Exercice 3 :

Soient P_1, P_2, P_3 et P_4 trois propositions telles que :

$P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \geq y$.

$P_2 : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 \geq 0$.

$P_3 : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ *si* $x \geq y$ *alors* $x^2+y^2 \geq 0$.

$P_4 : \forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, si $x \geq y$ alors $(x+y)^2+1 \geq 0$.

1. Les propositions P_1, P_2, P_3, P_4 sont-elles vraies ou fausses ?

2. Donner leurs négation.

Solution :

1. Les propositions P_1, P_2, P_3, P_4 sont-elles vraies ou fausses ?

- P_1 est une proposition vraie, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut prendre $y = x-1$.

- P_2 est une proposition fausse, car pour $x = 0 \in \mathbb{R}, x^2 - 4 = -4 < 0$.

- P_3 est une proposition vraie, car pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$x \geq y \Rightarrow x^2 \geq y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2y^2$$

et comme $y^2 \geq 0$ alors $x^2+y^2 \geq 0$.

- La proposition $P_4 : \forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, si $x \geq y$ alors $(x+y)^2+1 \geq 0$ est vraie, car si $x \geq y$ alors $x+y \geq 2y$ et par suite $(x+y)^2 \geq 4y^2$ ce qui donne $(x+y)^2+1 \geq 4y^2+1$ et comme

$4y^2 + 1 \geq 0$, alors $(x+y)^2 + 1 \geq 0$.

2. La négation.

- La négation de P_1 est

$$\overline{P_1} : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$$

- La négation de P_2 est

$$\overline{P_2} : \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 < 0$$

- La négation de P_3 est

$$\overline{P_3} : \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x \geq y) \wedge (x^2 + y^2 < 0)$$

- La négation de P_4 est

$$\overline{P_4} : \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x \geq y) \wedge ((x+y)^2 + 1 < 0)$$

Exercice 4
Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer. n est un entier naturel, x et y sont des nombres réels

1. $(x \neq y) \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
2. $(xy \neq 0) \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$.
3. n premier$\Rightarrow$ $n = 2$ ou n est impair

Solution Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}$
On sait que la contraposée de l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est $\left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$ et de plus on a :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$$

1. La contraposée de $(x \neq y) \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$ est

$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y$$

Supposons que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$, alors

$$xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1 \Rightarrow -x + y = x - y$$

$$\Rightarrow 2x = 2y$$

$$\Rightarrow x = y$$

2. La contraposée de $(xy \neq 0) \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$ est

$$x = 0 \text{ ou } y = 0 \Rightarrow xy = 0$$

Supposons que $x = 0$ ou $y = 0$, alors $xy = 0$ (Triviale).

3. La contraposée de «n premier$\Rightarrow n = 2$ ou n est impair» est

$$(n \neq 2 \text{ et } n \text{ pair}) \Rightarrow (n \text{ non premier})$$

Supposons que $n \neq 2$ et n pair, alors 2 divise n, donc n n'est pas premier.

Exercice 5
Montrer en utilisant le principe de raisonnement par l'absurde que :

1. Pour tout réel $x \neq 3$ on a : $\frac{1+2x}{3-x} \neq -2$.
2. Si $x, y \geq 0$ tel que $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$,alors $x = y$.
3. Si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$,alors $a = b = 0$.

Solution
1. Pour tout réel $x \neq 3$ on a : $\frac{1+2x}{3-x} \neq -2$
Soit $x \neq 3$, supposons que $\frac{1+2x}{3-x} = -2$ et on cherche une contradiction.
On a :

$$\frac{1+2x}{3-x} = -2 \Leftrightarrow 1 + 2x = -2\,(3 - x)$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2x = -6 + 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 = -6$$

qui est impossible.
Alors, D'aprés le principe de raisonnement par l'absurde, on a : Pour tout réel $x \neq 3$ on a : $\frac{1+2x}{3-x} \neq -2$.
2. Si $x, y \geq 0$ tel que $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$,alors $x = y$.
Soient $x, y \geq 0$.
Supposons que $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$ et $x \neq y$ et on cherche une contradiction.
On a :

$$\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1} \Leftrightarrow x\,(x + 1) = y\,(y + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)\,(x + y) + (x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)\,(x + y + 1) = 0$$

et comme $x \neq y$, alors $x - y \neq 0$. Donc

$$x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x + y = -1$$

C'est une contradiction, car la somme des deux nombres positifs ne peut être négative.
Conclusion : D'aprés le principe de raisonnement par l'absurde, «Si $x, y \geq 0$ tel que $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$,alors $x = y$».

3. Si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$,alors $a = b = 0$.
Soient a, b deux relatifs.
Supposons que $a + b\sqrt{2} = 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ et on cherche une contradiction.
Alors nécessairement $b \neq 0$ car si $b = 0$ alors on devrait aussi avoir $a = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $(a, b) \neq (0, 0)$.
Mais alors, on a : :

$$a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} = -\tfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$$

Ce qui est faux.
Conclusion : D'aprés le principe de raisonnement par l'absurde, «Si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$,alors $a = b = 0$».

Exercice 6 :

Montrer en utilisant le principe de raisonnement par contraposée que :

soit $n \in \mathbb{N}$

$$n^2 - 1 \ \text{ n'est pas divisible par 8} \ \Rightarrow \ n \text{ est pair}$$

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$n^2 - 1 \ \text{ n'est pas divisible par 8} \ \Rightarrow \ n \text{ est pair}$$

Par contraposée, on démontre que

$$n \text{ est impair} \ \Rightarrow \ n^2 - 1 \ \text{ est divisible par 8}$$

Soit n est impair, alors $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Pour $k = 2p$ (le ca où k est pair), on a $n = 2k + 1 = 4p + 1$, par suite

$$n^2 - 1 = \ (4p + 1)^2 - 1$$

$$= (16p^2 + 8p + 1) - 1$$

$$= 8\,(2p^2 + p)$$

ce qui montre que $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Pour $k = 2p + 1$ (le ca où k est impair), on a $n = 2k + 1 = 4p + 3$, par suite

$$n^2 - 1 = \ (4p + 3)^2 - 1$$

$$= (16p^2 + 24p + 9) - 1$$

$$= 8\,(2p^2 + 3p + 1)$$

ce qui montre que $n^2 - 1$ est divisible par 8.

D'aprés le principe de raisonnement par contaposée, on déduit que

$$n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par 8} \Rightarrow n \text{ est pair}$$

Exercice 7 :

Montrer en utilisant le principe de raisonnement par récurrence que :

1. Pour tout entier naturel non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

2. Pour tout entier naturel non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1.$$

3. Pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est divisible par 6.

Solution :

Pour tout entier naturel non nul, on a :

1.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

(i) **Initialisation :** On prouve que $P(n_0)$ est vraie avec $n_0 = 1$.

On a :

$$\sum_{k=1}^{n_0} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

et

$$2 - \frac{n_0+2}{2^{n_0}} = 2 - \frac{1+2}{2^1} = \frac{1}{2}$$

Ce qui montre que $P(n_0)$ est vraie.

(ii) **Hérédité** : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

On suppose que $P(n)$ vraie, c.à.d

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

et on démontre alors que la proposition $P(n+1)$ est vraie, c.à.d

$$\sum_{k=1}^{n+1} \tfrac{k}{2^k} = 2 - \tfrac{n+3}{2^{n+1}}$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} \tfrac{k}{2^k} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{4}\right) + ... + \left(\frac{n}{2n}\right)}_{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}} + \left(\tfrac{n+1}{2^{n+1}}\right)$$

$$= 2 - \tfrac{n+2}{2^n} + \left(\tfrac{n+1}{2^{n+1}}\right)$$

$$= 2 - \tfrac{2(n+2)-n-1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \tfrac{n+3}{2^{n+1}}$$

d'où la proposition $P(n+1)$ est vraie

(iii) **Conclusion** : D'aprés le principe de raisonnement par récurrence la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1.$$

Dans ce cas, on a : $n_0 = 1$ et la proposition $P(n)$ définie par $\sum\limits_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$.

Etape 1-Initialisation : On prouve que $P(n_0)$ est vraie

Pour $n = 1$, on a :

$\sum\limits_{k=1}^{n} k.k! = 1.1! = 1$ et $(n+1)! - 1 = (1+1)! - 1 = 1$.

Donc, la proposition est vraie pour le rang n_0.

Etape 2-Héridêté : On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Supposons que la proposition $P(n)$ est vraie c'est à dire $\sum\limits_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$ et montrons que la proposition $P(n+1)$ est vraie c'est à dire $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k.k! = (n+2)! - 1$.

On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k.k! = \left(\sum_{k=1}^{n} k.k!\right) + (n+1)(n+1)!$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

$$= ((n+1)!)(1 + (n+1)) - 1$$

$$= ((n+1)!)(n+2) - 1$$

$$= (n+2)! - 1.$$

Ce qui montre que la proposition $P(n+1)$ est vraie.
Etape 3-Conclusion : D'aprés le principe de raisonnement par récurrence la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

3. Pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est divisible par 6.
Dans ce cas, on a : $n_0 = 0$ et la proposition $P(n)$ définie par $n^3 - n$ est divisible par 6.
Etape 1-Initialisation : On prouve que $P(n_0)$ est vraie
Pour $n = 1$, on a :
$n^3 - n = 0 = 6 \times 0$.
Donc, la proposition est vraie pour le rang n_0.
Etape 2-Héridété : On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
Supposons que la proposition $P(n)$ est vraie c'est à dire $n^3 - n$ est divisible par 6 et montrons que la proposition $P(n+1)$ est vraie c'est à dire $(n+1)^3 - (n+1)$ est divisible par 6.
On a :

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n + 3n^2 + 1 - n - 1$$

$$= (n^3 - n) + 3n + 3n^2$$

$$= (n^3 - n) + 3n(n+1)$$

On sait que $n(n+1)$ est pair, donc il existe un entier naturel k tel que $n(n+1) = 2k$.
Alors,

$$(n+1)^3 - (n+1) = 6p + 6k$$

Donc, il existe un entier naturel s tel que $(n+1)^3 - (n+1) = 6s$. D'où $(n+1)^3 - (n+1)$ est divisible par 6.
Ce qui montre que la proposition $P(n+1)$ est vraie.
Etape 3-Conclusion : D'aprés le principe de raisonnement par récurrence la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.