Chapitre 3

Relations binaires sur un ensemble

3.1 Définitions de base

Définition 3.1 *Soient E et F deux ensembles*
Une relation binaire de E vers F est une partie $\Re$ de $E \times F$. Si $(x, y) \in \Re$ alors on dit que x est en relation avec y et on le note $x\Re y$.
Dans le cas ou $E = F$ on dit que $\Re$ est définie sur E.

Exemple 3.1
– L'égalité «$=$» est une relation sur un ensemble E.
– L'inégalité «$\leq$» est une relation sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$.
– L'inclusion «$\subset$» est une relation sur $P(X)$, où X est un ensemble quelconque.

Remarque 3.1
On peut représenter une relation binaire par un graphe. Par exemple la relation «$\leq$» sur l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

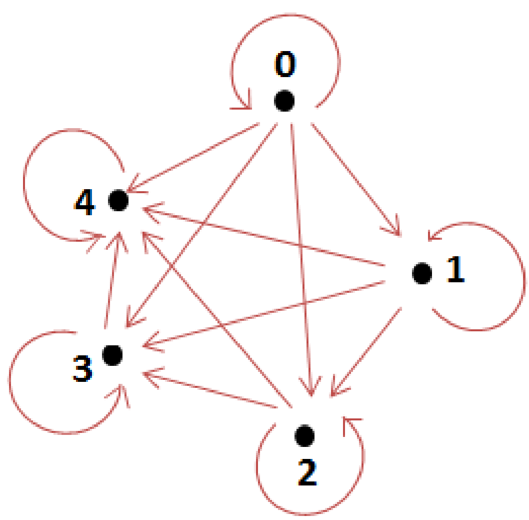

Fig 3.1 : Graphe de la relation « $\leq$ »
sur l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

3.1.1 Relation réflexive

Définition 3.2 *Soit $\Re$ une relation binaire sur un ensemble E.*
$\Re$ est réflexive si pour tout $x \in E$, on a : $x\Re x$.

Exemple 3.2
- L'inégalité «$\leq$» sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ est réflexive.
- L'inégalité «$<$» sur $\mathbb{N}$ n'est par réflexive. Car on peut trouver un entier naturel x qui n'est pas en relation avec lui même.

3.1.2 Symétrique

Définition 3.3 *Soit $\Re$ une relation binaire sur un ensemble E.*
$\Re$ est symétrique si pour tout $x, \in E$, on a :

$$x\Re y \Rightarrow y\Re x.$$

Exemple 3.3
- L'inégalité «$\leq$» sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ est symétrique.
- L'inégalité «$<$» sur $\mathbb{N}$ n'est par symétrique. Car on peut trouver deux entiers naturels x, y tels que x est en relation avec y et y n'est pas en relation avec x.

3.1.3 Antisymétrique

Définition 3.4 *Soit $\Re$ une relation binaire sur un ensemble E.*
$\Re$ est antisymétrique si pour tout $x, y \in E$, on a :

$$(x\Re y \text{ et } y\Re x) \Rightarrow x = y.$$

Exemple 3.4
- L'inégalité «$\leq$» sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ est antisymétrique.

3.1.4 Transitive

Définition 3.5 *Soit $\Re$ une relation binaire sur un ensemble E.*
$\Re$ est transitive si pour tout $x, y, z \in E$, on a :

$$(x\Re y \text{ et } y\Re z) \Rightarrow x\Re z.$$

Exemple 3.5
- L'inégalité «$\leq$» sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ est tansitive.
- L'inégalité «$<$» sur $\mathbb{N}$ est tansitive.

3.2 Relation d'ordre

Définition 3.6 *Soit $\Re$ une relation binaire sur un ensemble E.*
On dit que $\Re$ est une relation d'ordre si $\Re$ est réflexive, antisymétrique ettransitive.
Exemple 3.6
– L'inégalité «$\leq$» sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre.

3.2.1 Ordre total et partiel

Définition 3.7 *Soit $\Re$ une relation d'ordre sur un ensemble E.*

1. *On dit que deux éléments x et y de E sont comparable ssi :*
$$x\Re y \quad ou \quad y\Re x.$$
2. *On dit que $\Re$ est une relation d'ordre total, si tous les éléments de E sont deux à deux comparables. Si non, on dit que la relation est une relation d'ordre partiel.*

Exemple 3.7
Soit E un ensemble et $X = \rho(E)$. On considère sur X la relation binaire suivante
$$\forall A, B \in X, \quad A\ T\ B \ \Leftrightarrow\ A \subset B.$$
Alors,
1- T est une relation d'ordre
– (i) T est réflexive, car pour tout ensemble $A \in X$, on a
$$A \subset A \Rightarrow A\ T\ A$$
– (ii) T est antisymétrique, car pour tous $A, B \in X$, on a
$$(A\ T\ B)\ \ et\ \ (B\ T\ A) \Rightarrow (A\ \subset\ B)\ \ et\ \ (B\ \subset\ A)$$
$$\Rightarrow A = B$$
– (iii) T est transitive, car pour tous $A, B, C \in X$, on a
$$(A\ T\ B)\ \ et\ \ (B\ T\ C) \Rightarrow (A\ \subset\ B)\ \ et\ \ (B\ \subset\ C)$$
$$\Rightarrow \forall x\ \ ((x \in A \Rightarrow x \in B)\ \ et\ \ (x \in B \Rightarrow x \in C))$$
$$\Rightarrow \forall x\ \ (x \in A \Rightarrow x \in C)$$
$$\Rightarrow B\ \subset\ C$$
$$\Rightarrow A\ T\ C$$
De (i), (ii) et (iii) on déduit que T est une relation d'ordre sur X.
2- L'ordre est - il total ?

– Si $E = \emptyset$, alors $X = \{\emptyset\}$ et on a : $\forall A, B \in X,\ A = B = \emptyset$, donc

$$\forall A, B \in X,\ \ A \subset B$$

ce qui montre que l'ordre est total.

– Si E est un signgleton, alors $E = \{a\}$ et $X = \{\emptyset, \{a\}\}$, pour tous $A, B \in X$ on a

$$A = \emptyset\ \vee\ A = \{a\}$$

$$et$$

$$B = \emptyset\ \vee\ B = \{a\},$$

donc

$$\forall A, B \in X,\ \ A \subset B\ \ ou\ \ B \subset A$$

ce qui montre que l'ordre est total.

– Si E contient au moins deux éléments distincts a et b, alors

$$\exists\ A = \{a\},\ \ B = \{b\},\ \ (A\ \ \not\subseteq\ \ B)\ \ et\ \ (B\ \ \not\subseteq\ \ A)$$

ce qui montre que l'ordre est partiel.

3.3 Relation d'équivalence

Définition 3.8 *Soit $\Re$ une relation binaire sur un ensemble E.*
On dit que $\Re$ est une relation d'équivalence sur E si $\Re$ est réflexive, symétriqueet transitive.
Exemple 3.8
Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire δ par :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad a\delta b \Leftrightarrow \cos^2 a + \sin^2 b = 1$$

Montrer que δ est une relation d'équivalence.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a :
(i)

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \Rightarrow a\delta a$$

Alors, δ est réflexive.
(ii)

$$a\delta b \Rightarrow \cos^2 a + \sin^2 b = 1$$

$$\Rightarrow \left(1 - \sin^2 a\right) + \left(1 - \cos^2 b\right) = 1$$

$$\Rightarrow -\left(\sin^2 a + \cos^2 b\right) + 2 = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 b + \sin^2 a = 1$$

$$\Rightarrow b\delta a$$

Alors, δ est symétrique.
(iii)

$$(a\delta b \text{ et } b\delta c) \Rightarrow (\cos^2 a + \sin^2 b = 1 \text{ et } \cos^2 b + \sin^2 c = 1)$$

$$\Rightarrow (\cos^2 a + \sin^2 b + \cos^2 b + \sin^2 c = 2)$$

$$\Rightarrow (\cos^2 a + \sin^2 c = 1)$$

$$\Rightarrow a\delta c$$

Alors, δ est transitive.
De (i), (ii) et (iii) on déduit que δ est une relation d'équivalence.

3.3.1 Classe d'équivalence

- *Soit $\Re$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Soit $x \in E$, la classe d'équivalence de x est*

$$Cl\,(x) = \hat{\dot{x}} = \{y \in E \ / \ y\Re x\}$$

- *$Cl\,(x)$ est donc un sous-ensemble de E.*
- *On appelle ensemble quotient de E par la relation d'équivalence $\Re$, l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E . Cet ensemble est noté $E/\Re$.*

Exemple 3.9
Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\Re$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\Re y \Leftrightarrow x^3 - 3x = y^3 - 3y$$

Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence et déterminer la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :
(i)

$$x^3 - 3x = x^3 - 3x \Rightarrow x\Re x$$

Alors, $\Re$ est réflexive.
(ii)

$$x\Re y \Rightarrow x^3 - 3x = y^3 - 3y$$

$$\Rightarrow y^3 - 3y = x^3 - 3x$$

$$\Rightarrow y\Re x$$

Alors, $\Re$ est symétrique.
(iii)

$$(x\Re y \text{ et } y\Re z) \Rightarrow (x^3 - 3x = y^3 - 3y \text{ et } y^3 - 3y = z^3 - 3z)$$

$$\Rightarrow (x^3 - 3x = z^3 - 3z)$$

$$\Rightarrow x\Re z$$

Alors, $\Re$ est transitive.
De (i), (ii) et (iii) on déduit que $\Re$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$Cl\,(x) = \{y \in E \ \ / \ \ y \Re x\}$$

$$= \{y \in E \ \ / \ \ y^3 - 3y = x^3 - 3x\}$$

$$y^3 - 3y = x^3 - 3x \Leftrightarrow (y^3 - x^3) - 3\,(y - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - x)\,(y^2 + xy + x^2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y - x = 0 \\ \\ y^2 + xy + x^2 - 3 = 0 \end{array} \right.$$

On résout la deuxième équation.

$$\Delta = x^2 - 4\,(x^2 - 3) = 3\,(4 - x^2)$$

Alors,
Si $x \in \left]-2, 2\right[$, l'équation admet deux solutions

$$y = \tfrac{-x-\sqrt{12-3x^2}}{2} \ \text{ ou } \ y = \tfrac{-x+\sqrt{12-3x^2}}{2}$$

Si $x = -2$, l'équation admet une solution

$$y = 1$$

Si $x = 2$, l'équation admet une solution

$$y = -1$$

Si $x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, +\infty\right[$, l'équation n'admet pas de solutions.
Donc,

$$Cl\,(x) = \left\{ \begin{array}{l} \left\{x, \tfrac{-x-\sqrt{12-3x^2}}{2}, \tfrac{-x+\sqrt{12-3x^2}}{2}\right\} \quad \text{si} \ \ x \in \left]-2, 2\right[\\ \\ \{x\} \quad \text{si} \ \ x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, +\infty\right[\\ \\ \{-2, 1\} \quad \text{si} \ \ x = -2 \\ \\ \{-1, 2\} \quad \text{si} \ \ x = 2 \end{array} \right.$$

Proposition 3.1
Soit $\Re$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. On a les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in E$,

$$Cl\,(x) \neq \varnothing$$

2.
$$Cl\,(x) = Cl\,(y) \Leftrightarrow x\Re y$$

3. $\forall x, y \in E$,
$$Cl\,(x) = Cl\,(y) \quad \text{ou} \quad Cl\,(x) \cap Cl\,(y) = \varnothing$$

4. *Soit F un ensemble de représentants de toutes les classes alors $\{Cl\,(x)\,,\ x \in F\}$ constitue une partition de E.*

Démonstration :
1. Comme $\Re$ est une relation d'équivalence, alors $x\Re x$ ($\Re$ est réflexive).
d'où $x \in Cl\,(x)$,donc $Cl\,(x) \neq \varnothing$.
2.
($\Rightarrow$) Supposons que $Cl\,(x) = Cl\,(y)$.
Soit $z \in Cl\,(x)$, alors $z \in Cl\,(y)$ et donc $z\Re x$ et $z\Re y$, d'après la transitivitè, $x\Re y$.
($\Leftarrow$) Supposons que $x\Re y$.
On démontre que $Cl\,(x) \subset Cl\,(y)$.
Soit $z \in Cl\,(x)$, alors $z\Re x$ et comme $x\Re y$, alors d'après la transitivité, $z\Re y$ ce qui implique $z \in Cl\,(y)$.
D'où $Cl\,(x) \subset Cl\,(y)$.
De la même manière on démontre que $Cl\,(y) \subset Cl\,(x)$.
3. Soient $x, y \in E$. Supposons que $Cl\,(x) \cap Cl\,(y) \neq \varnothing$, alors il existe $z \in Cl\,(x) \cap Cl\,(y)$, donc $z\Re x$ et $z\Re y$.
Montrons que $Cl\,(x) = Cl\,(y)$.
Soit $t \in Cl\,(x)$, alors
$$((t\Re x) \wedge (z\Re x)) \wedge (z\Re y)\,.$$
Comme $\Re$ est symétrique et transitive, alors
$$(t\Re z) \wedge (z\Re y)\,,$$
et d'après la transitivité de $\Re$, on déduit que
$$t\Re y,$$
ce qui implique
$$t \in Cl\,(y)\,,$$
d'où
$$Cl\,(x) \subset Cl\,(y)\,.$$
De la même manière, on démontre que
$$Cl\,(y) \subset Cl\,(x)\,,$$
finalement, on trouve
$$Cl\,(x) = Cl\,(y)\,.$$
4. Est une conséquence directe de (1) et (3) : Il faut montrer que

(a) -

$$E = \underset{\dot{a}_i \in E_{/\Re}}{\cup} \dot{a}_i$$

(b) -

$$\dot{a}_i \cap \dot{a}_j = \varnothing, \qquad i \neq j$$

(a) est une conséquence de (1) : Les classes d'équivalence de E sont toutes non vides (tout élément de E appartient à une classe d'équivalence).
(b) est une conséquence de (3) : Deux classes d'équivalences sont soit les mêmes, soit disjointes.

3.4 Les congruences

Définition 3.9 *Soit n un entier naturel non nul. On dit que deux entiers relatifs a et b sont congrus modulo n ou encore que a est congru à b modulo n si n divise $a - b$. On notera $a \equiv b \ mod \ n$ ou $a \equiv b[n]$.*

Exemple 3.10

– $2021 \equiv 21[20]$.
– $305 \equiv -15[5]$.

Proposition 3.2

La relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence.

Preuve

Soient n un entier naturel non nul et $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On a :
(i)

$$a - a = 0 = 0 \times n \Rightarrow a \equiv a[n]$$

Alors, la relation de congruence est réflexive.
(ii)

$$a \equiv b[n] \Rightarrow a - b = kn$$

$$\Rightarrow b - a = (-k)\, n$$

$$\Rightarrow b \equiv a[n]$$

Alors, la relation de congruence est symétrique.
(iii)

$$(a \equiv b[n] \text{ et } b \equiv c[n]) \Rightarrow (a - b = k_1 n \text{ et } b - c = k_2 n)$$

$$\Rightarrow (a - b + b - c = k_1 n + k_2 n)$$

$$\Rightarrow a - c = (k_1 + k_2)\, n$$

$$\Rightarrow a \equiv c[n]$$

Alors, la relation de congruence est transitive.
De (i), (ii) et (iii) on déduit que la relation de congruence est une relation d'équivalence.

Proposition 3.3

$a \equiv b[n]$ si et seulement si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

Preuve

Soient (q_1, r_1) et (q_2, r_2) les deux couples uniques d'entiers tels que

$$a = q_1 n + r_1 \quad \text{et} \quad b = q_2 n + r_2,$$

avec $0 \leq r_1, r_2 < n$.

Alors,

$$a - b = (q_1 - q_2)\, n + (r_1 - r_2)$$
$$a - b \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow r_1 - r_2 \in n\mathbb{Z}.$$

Or

$$-n < r_1 - r_2 < n \quad \text{et} \quad]-n, n[\, \cap\, n\mathbb{Z} = \{0\}\,,$$

donc

$$r_1 = r_2.$$

Proposition 3.4

Soient n un entier naturel non nul et $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

1. *Si $a \equiv b[n]$ et si $c \equiv d[n]$, alors*

$$a + c \equiv b + d[n], \qquad a - c \equiv b - d[n], \qquad a \times c \equiv b \times d[n], \qquad a^k \equiv b^k[n] \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*$$

2. *Si $a \equiv b[n]$, alors pour tout $p \in \mathbb{Z}$*

$$a + p \equiv b + p[n], \qquad a - p \equiv b - p[n], \qquad a \times p \equiv b \times p[n]$$

Preuve

Soient n un entier naturel non nul et $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

1. Si $a \equiv b[n]$ et si $c \equiv d[n]$, alors
   - $a - b$ est un multiple de n et $c - d$ est un multiple de n.
   On en déduit que : $(a - b) + (c - d)$ et $(a - b) - (c - d)$ sont des multiples de n.
   C'est-à-dire $(a + c) - (b + d)$ et $(a - c) - (b - d)$ sont des multiples de n.
   Donc $a + c \equiv b + d[n]$ et $a - c \equiv b - d[n]$.
   - Puisque $a - b$ est un multiple de n , $c(a - b)$ est un multiple de n.
   Puisque $c - d$ est un multiple de n , $b(c - d)$ est un multiple de n.
   On en déduit que $c(a - b) + b(c - d)$ est un multiple de n.
   C'est-à-dire $ca - cb + bc - bd$ est un multiple de n.
   On a alors $ac - bd$ est un multiple de n , c'est-à-dire $ac \equiv bd[p]$.
   - Considérons pour $k \in \mathbb{N}^*$ la proposition $P(k)$: $a^k \equiv b^k[n]$.
   Pour $k = 1$, on a $a^1 = a$ et $b^1 = b$ et on sait que $a \equiv b[n]$ donc $P(1)$ est vraie.
   Supposons que la proposition $P(k)$ est vraie pour un entier $k \geq 1$.
   On a $a^k \equiv b^k[n]$ et $a \equiv b[n]$. On en déduit que (d'après la propriété précédente) : $a^k \times a \equiv b^k \times b[n] \Leftrightarrow a^{k+1} \equiv b^{k+1}[n]$
   La proposition $P(k + 1)$ est donc vraie.
   On a donc démontré par récurrence que $P(k)$ est vraie pour tout entier $k \geq 1$.
   Donc $a^k \equiv b^k[n]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. *Si $a \equiv b[n]$, alors pour tout $p \in \mathbb{Z}$*
   - Alors $a - b$ est un multiple de n ,
   On peut écrire $a - b = (a+p) - (b+p)$. Donc $(b+p) - (a+p)$ est un multiple de n. On en déduit que $a + p \equiv b + p[n]$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
   - De même on peut écrire $a - b = (a-p) - (b-p)$. Donc $a - p \equiv b - p[n]$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
   D'autre part, puisque $a - b$ est un multiple de n, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $p(a-b)$ est un multiple de n, c'est-à-dire que $ap - bp$ est un multiple de n donc $a \times p \equiv b \times p[n]$.

3.5 Ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Pour tout entier $n \geq 2$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence modulo n.
On a :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, ..., \dot{\widehat{n-1}}\right\}$$

où $\dot{x}$ est la classe de x c'est à dire l'ensemble des nombres dont la division euclidienne par n a pour reste x.

Exemple 3.11
– $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \left\{\dot{0}, \dot{1}\right\}$ *avec* $\dot{0} = \{$*nombre pairs*$\}$ *et* $\dot{1} = \{$*nombre impairs*$\}$.
– $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \left\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\right\}$.

Opérations
On va définir une opération somme notée $\dot{+}$ et une opération multiplication notée $\dot{\times}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de la façon suivante :

$$\dot{a} \ \dot{+} \ \dot{b} \ = \dot{\widehat{a+b}}$$

$$\dot{a} \ \dot{\times} \ \dot{b} \ = \dot{\widehat{a \times b}}$$

Exemple 3.12
Quelques calculs dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$
–
$$\dot{5} \ \dot{+} \ \dot{6} \ = \ \dot{\widehat{11}} \ = \ \dot{2} \ , \quad \dot{3} \ \dot{\times} \ \dot{7} \ = \ \dot{\widehat{21}} \ = \ \dot{3}$$
–
$$\dot{3} \ \dot{+} \ \dot{6} \ = \ \dot{\widehat{9}} \ = \ \dot{0} \ ,$$

on dit que $\dot{3}$ est l'opposé de $\dot{6}$ et que $\dot{6}$ est l'opposé de $\dot{3}$.
–
$$\dot{2} \ \dot{\times} \ \dot{5} \ = \ \dot{\widehat{10}} \ = \ \dot{1} \ ,$$

on dit que $\dot{2}$ est l'inverse de $\dot{5}$ et que $\dot{5}$ est l'inverse de $\dot{2}$.

–

$$\dot{3} \;\dot{\times}\; \dot{6} \;=\; \dot{\widehat{9}} \;=\; \dot{0}$$

on dit que $\dot{3}$ et $\dot{6}$ sont des diviseurs de zéros.

Exemple 3.13

L'opération somme $\dot{+}$ et l'opération multiplication $\dot{\times}$ sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$\dot{+}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$

$\dot{\times}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

3.6 Exercices

Exercice 1

Soit $\Re$ la relation binaire dans $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ définie par $x\Re y$ si et seulement si $x \times y$ est pair.

1. Déterminer $\Gamma_{\Re}$ graphe de $\Re$.

2. $\Re$ est-elle réflexive ? est-elle symétrique ? antisymétrique ? transitive ?

Solution

1. Déterminer $\Gamma_{\Re}$ graphe de $\Re$.

$$\Gamma_{\Re} = \{(x, y) \in E \times E \ / \ x\Re y\}$$

$$= \{(x, y) \in E \times E \ / \ x \times y \text{ est pair}\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), \\ (1,0), (1,2), (1,4), (2,0), (2,1), (2,2), \\ (2,3), (2,4), (2,5), (3,0), (3,2), (3,4), \\ (4,0), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), \\ (5,0), (5,2), (5,4) \end{array} \right\}$$

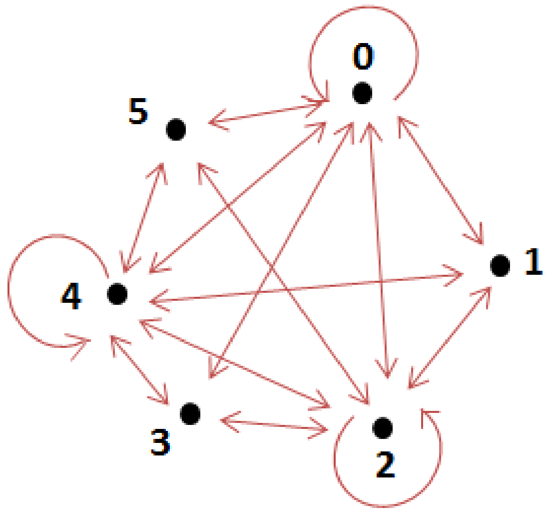

Fig 3.2 : Graphe de la relation «$\Re$»
sur l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

2. $\Re$ est-elle réflexive ?
$\Re$ n'est pas réflexive, car il existe $x \in E$ tel que x n'est pas en relation avec lui même. (Par exemple $x = 1$, on a $1 \times 1 = 1$ est impair).
Est-elle symétrique ?
$\Re$ est symétrique, car pour tout $x, y \in E$ on a

$$x\Re y \Rightarrow x \times y \ est\ pair$$

$$\Rightarrow y \times x \ est\ pair$$

$$\Rightarrow y\Re x$$

Est-elle antisymétrique ?
$\Re$ n'est pas antisymétrique, car il existe $x, y \in E$ tel que x est en relation avec y et y est en relation avec x mais $x \neq y$. (Par exemple $x = 1$ et $y = 0$, on a $(1\Re 0) \wedge (0\Re 1) \wedge (x \neq y)$).
Est-elle transitive ?
$\Re$ n'est pas transitive, car il existe $x, y, z \in E$ tel que $x\Re y$ et $y\Re z$ mais x n'est pas en relation avec z. (Par exemple $x = 1, y = 2$ et $z = 3$, on a $(1\Re 2)\wedge(2\Re 3)\wedge$(1 n'est pas en relation avec 3)).
Exercice 2
Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\Re$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\Re y \Leftrightarrow x^4 - y^4 = x^2 - y^2$$

Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence et déterminer la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$.
Solution
1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :

(i)
$$x^4 - x^4 = x^2 - x^2 \Rightarrow x\Re x$$
Alors, $\Re$ est réflexive.
(ii)
$$x\Re y \Rightarrow x^4 - y^4 = x^2 - y^2$$
$$\Rightarrow y^4 - x^4 = y^2 - x^2$$
$$\Rightarrow y\Re x$$
Alors, $\Re$ est symétrique.
(iii)
$$(x\Re y \text{ et } y\Re z) \Rightarrow (x^4 - y^4 = x^2 - y^2 \text{ et } y^4 - z^4 = y^2 - z^2)$$
$$\Rightarrow x^4 - y^4 + y^4 - z^4 = x^2 - y^2 + y^2 - z^2$$
$$\Rightarrow x^4 - z^4 = x^2 - z^2$$
$$\Rightarrow x\Re z$$
Alors, $\Re$ est transitive.
De (i), (ii) et (iii) on déduit que $\Re$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$Cl\,(x) = \{y \in E \;\;/\;\; y\Re x\}$$
$$= \{y \in \mathbb{R} \;\;/\;\; y^4 - x^4 = y^2 - x^2\}$$
$$y^4 - x^4 = y^2 - x^2 \Leftrightarrow (y^2 - x^2)(y^2 + x^2) - (y^2 - x^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (y^2 - x^2)(y^2 + x^2 - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 = 0 \\ \\ y^2 + x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$
On résout la deuxième équation.
Si $x \in \left]-1, 1\right[$, l'équation admet deux solutions
$$y = \sqrt{1 - x^2} \;\text{ ou }\; y = -\sqrt{1 - x^2}$$
Si $x = \pm 1$, l'équation admet une solution
$$y = 0$$
Si $x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$, l'équation n'admet pas de solutions.

Donc,

$$Cl\,(x) = \begin{cases} \left\{-x, x, \sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2}\right\} & \text{si } \ x \in \left]-1,1\right[\\ \{-x, x\} & \text{si } \ x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,+\infty\right[\\ \{-1,0,1\} & \text{si } \ x \in \{-1,1\} \end{cases}$$

Exercice 3

Dans $\mathbb{Z}$, on définit la relation binaire $\Re$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x \Re y \Leftrightarrow x - y \ \textit{est un multiple de } 5.$$

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{Z}_{/\Re}$.
3. Montrer que $\overline{\dot{84}} = \overline{\dot{14}}$ et $\overline{\dot{52}} \cap \overline{31}^{\,\dot{}} = \varnothing$.

Solution

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$, on a :

(i)

$$x - x = 0 = 0 \times 5 \Rightarrow x - y \ \textit{est un multiple de } 5$$

$$\Rightarrow x \Re x$$

Alors, $\Re$ est réflexive.

(ii)

$$x \Re y \Rightarrow x - y \ \textit{est un multiple de } 5$$

$$\Rightarrow x - y = 5k, \ \textit{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y - x = -5k,$$

$$\Rightarrow \exists p = -k \in \mathbb{Z}, \ y - x = 5p$$

$$\Rightarrow y - x \ \textit{est un multiple de } 5$$

$$\Rightarrow y \Re x$$

Alors, $\Re$ est symétrique.

(iii)

$$(x\Re y \text{ et } y\Re z) \Rightarrow (x-y \textit{ est un multiple de } 5 \text{ et } y-z \textit{ est un multiple de } 5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=5k_1 \\ \\ y-z=5k_2 \end{cases}, \quad \textit{avec} \;\; k_1,k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x-y+y-z=5k_1+5k_2$$

$$\Rightarrow x-z=5\left(k_1+k_2\right)$$

$$\Rightarrow \exists k_3=k_1+k_2 \in \mathbb{Z},\; x-z=5k_3$$

$$\Rightarrow x-z \textit{ est un multiple de } 5$$

$$\Rightarrow x\Re z$$

Alors, $\Re$ est transitive.
De (i), (ii) et (iii) on déduit que $\Re$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{Z}_{/\Re}$.
On sait que $\mathbb{Z}_{/\Re}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de $\mathbb{Z}$.
Et comme $\Re$ c'est la relation de congruence, alors

$$\mathbb{Z}_{/\Re}=\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\left\{\dot{\overline{0}},\dot{\overline{1}},\dot{\overline{2}},\dot{\overline{2}},\dot{\overline{4}}\right\}$$

3. Montrer que $\dot{\overline{84}}=\dot{\overline{14}}$ et $\dot{\overline{52}}\cap\overline{31}\;\dot{}=\varnothing$.
On sait que deux classes d'équivalences sont soit les mêmes, soit disjointes.
On a

$$84-14=70=14\times 5,$$

ce qui implique

$$84\Re 14,$$

alors,

$$\dot{\overline{84}} \;=\; \dot{\overline{14}}.$$

Et on a

$$52-31=21,$$

ce qui implique

$$52 \textit{ n'est pas en relation avec } 31,$$

alors,

$$\dot{\overline{84}} \;\cap\; \dot{\overline{14}} \;=\varnothing$$

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la relation binaire $\Re$ par :

$$(a,b)\ \Re\ (c,d) \Leftrightarrow a \leq c \ et \ b \leq d.$$

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre.
2. L'ordre est il total ?

Solution

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre.

Soient $(a_1,b_1)\,,(a_2,b_2)\,,(a_3,b_3)\in\mathbb{R}^2$, on a :

(i)

$$a_1 \leq a_1 \ et \ b_1 \leq b_1 \Rightarrow (a_1,b_1)\ \Re\ (a_1,b_1)$$

Alors, $\Re$ est réflexive.

(ii)

$$\left\{\begin{array}{c}(a_1,b_1)\ \Re\ (a_2,b_2)\\ \\ et\\ \\ (a_2,b_2)\ \Re\ (a_1,b_1)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}(a_1\leq a_2)\ \wedge\ (b_1\leq b_2)\\ \\ et\\ \\ (a_2\leq a_1)\ \wedge\ (b_2\leq b_1)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c}(a_1\leq a_2)\ \wedge\ (a_2\leq a_1)\\ \\ et\\ \\ (b_1\leq b_2)\ \wedge\ (b_2\leq b_1)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c}a_1=a_2\\ \\ et\\ \\ b_1=b_2\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow (a_1,b_1) \ = \ (a_2,b_2)$$

Alors, $\Re$ est antisymétrique.

(iii)

$$\left\{\begin{array}{c}(a_1,b_1)\ \Re\ (a_2,b_2)\\ \\ et\\ \\ (a_2,b_2)\ \Re\ (a_3,b_3)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}(a_1\leq a_2)\ \wedge\ (b_1\leq b_2)\\ \\ et\\ \\ (a_2\leq a_3)\ \wedge\ (b_2\leq b_3)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c}(a_1\leq a_2)\ \wedge (a_2\leq a_3)\\ \\ et\\ \\ (b_1\leq b_2)\ \wedge\ (b_2\leq b_3)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c}(a_1\leq a_2)\ \wedge (a_2\leq a_3)\\ \\ et\\ \\ (b_1\leq b_2)\ \wedge\ (b_2\leq b_3)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c}a_1\leq a_3\\ \\ et\\ \\ b_1\leq b_3\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow (a_1,b_1)\ \Re\ (a_3,b_3)$$

Alors, $\Re$ est transitive.
De (i), (ii) et (iii) on déduit que $\Re$ est une relation d'ordre.
2. L'ordre est il total ?
Soient $(a_1,b_1)=(2,5)\,,(a_2,b_2)=(7,3)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$(a_1,b_1)\ \textit{n'est pas en relation avec}\ (a_2,b_2)$$

$$et$$

$$(a_2,b_2)\ \textit{n'est pas en relation avec}\ (a_1,b_1)$$

On déduit que l'ordre est partiel.
Exercice 5
Soit T la relation sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par :

$$xTy\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N},\ y=x^n.$$

1. Montrer que T est une relation d'ordre.
2. L'ordre est il total ?
Solution

1. Montrer que T est une relation d'ordre.
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
(i)

$$x = x^1 \Rightarrow \exists n = 1 \in \mathbb{N},\ x = x^n \Rightarrow xTx$$

Alors, T est réflexive.
(ii)

$$\begin{cases} x\ T\ y \\ \\ et \\ \\ y\ T\ x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N},\ y = x^{n_1} \\ \\ et \\ \\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ x = y^{n_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = (x^{n_1})^{n_2} = x^{n_1 n_2}$$

$$\Rightarrow n_1 n_2 = 1$$

$$\Rightarrow n_1 = n_2 = 1$$

donc,

$$x = y$$

Alors, T est antisymétrique.
(iii)

$$\begin{cases} x\ T\ y \\ \\ et \\ \\ y\ T\ z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N},\ y = x^{n_1} \\ \\ et \\ \\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ z = y^{n_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = y^{n_2} = (x^{n_1})^{n_2} = x^{n_1 n_2}$$

$$\Rightarrow \exists n_3 = n_1 n_2 \in \mathbb{N},\ z = x^{n_3}$$

$$\Rightarrow x\ T\ z$$

Alors, T est transitive.
De (i), (ii) et (iii) on déduit que T est une relation d'ordre.
2. L'ordre est il total ?
Soient $x = 5, y = 3 \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$x \textit{ n'est pas en relation avec } y$$

$$et$$

$$y \textit{ n'est pas en relation avec } x$$

On déduit que l'ordre est partiel.