ESPACE VECTORIEL

Dans ce chapitre $\mathbb{k}$ désigne un corps commutatif.

0.1 Définition d'un Espace Vectoriel

Définition 1 *On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ ou $\mathbb{k}$-espace vectoriel, tout ensemble non vide E muni de deux lois :*
- une loi de composition interne (notée $+$)

$$\begin{array}{rcl} + : E \times E & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \tag{1}$$

- une loi de composition externe (notée $\bullet$)

$$\begin{array}{rcl} \bullet : \mathbb{k} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \bullet u \end{array} \tag{2}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $\forall u, v \in E,\ u + v = v + u$ *(commutative)*

2. $\forall u, v, w \in E, u + (v + w) = (u + v) + w$ *(associative)*

3. $+$ possède un élément neutre. $\exists 0_E \in E, \forall u \in E,\ u + 0_E = u$.

4. *Tout $u \in E$ admet un symétrique u',* $\forall u \in E, \exists u^{'} \in E,\ u + u^{'} = 0_E$.

5. $\forall u \in E, 1_{\mathbb{k}} \bullet u = u$.

6. $\forall u \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}, \alpha \bullet (\beta \bullet u) = (\alpha\beta) \bullet u$.

7. $\forall u \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}, (\alpha + \beta) \bullet u = \alpha \bullet u + \beta \bullet u$.

8. $\forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{k}, \alpha \bullet (u + v) = \alpha \bullet u + \alpha \bullet v$.

Définition 2
Les éléments d'un espace vectoriel s'appellent des vecteurs. Ceux du corps $\mathbb{k}$ s'appellent des scalaires.

Exemple 1

Soient $\Bbbk = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. On définit les dex lois comme suit

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E \\ ((x,y),(x',y')) &\mapsto (x,y),(x',y') = (x+x', y+y') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bullet : \Bbbk \times E &\rightarrow E \\ (\lambda,(x,y)) &\mapsto \lambda \bullet (x,y) = (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

On vérifie que $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
Soient $u = (x,y), v = \left(x^{'}, y^{'}\right), w = \left(x^{''}, y^{''}\right) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$u + v = \left(x + x^{'}, y + y^{'}\right) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \lambda \bullet u = (\lambda x, \lambda y) \in \mathbb{R}^2$$

Donc $+$ est une loi de composition interne et $\bullet$ est une loi de composition externe.

1. *$+$ est commutative :*

$$u + v = (x,y) + \left(x^{'}, y^{'}\right) = \left(x + x^{'}, y + y^{'}\right)$$

$$= \left(x^{'} + x, y^{'} + y\right) = \left(x^{'}, y^{'}\right) + (x,y) = v + u.$$

2. *$+$ est associative :*

$$(u+v) + w = \left[(x,y) + \left(x^{'}, y^{'}\right)\right] + \left(x^{''}, y^{''}\right) = \left(x + x^{'}, y + y^{'}\right) + \left(x^{''}, y^{''}\right)$$

$$= \left(x + x^{'} + x^{''}, y + y^{'} + y^{''}\right) = (x,y) + \left(x^{'} + x^{''}, y^{'} + y^{''}\right)$$

$$= (x,y) + \left[\left(x^{'}, y^{'}\right) + \left(x^{''}, y^{''}\right)\right] = u + (v + w).$$

3. *$+$ possède un élément neutre.*

Il existe un élément neutre $0_E = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$u + 0_{\mathbb{R}^2} = (x,y) + (0,0) = (x+0, y+0) = (x,y) = u.$$

4. *Tout $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ admet un symétrique $u' = (-x,-y) \in \mathbb{R}^2$ tel que*

$$u + u^{'} = (x,y) + (-x,-y) = (x + (-x), y + (-y))$$

$$= (x - x, y - y) = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

5.

$$1_{\Bbbk} \bullet u = 1 \bullet (x,y) = (1 \times x, 1 \times y) = (x,y) = u.$$

6.

$$\alpha \bullet (\beta \bullet u) = \alpha \bullet (\beta \bullet (x,y)) = \alpha \bullet (\beta x, \beta y)$$

$$= (\alpha\beta x, \alpha\beta y) = (\alpha\beta) \bullet (x,y) = (\alpha\beta) \bullet u.$$

7.

$$(\alpha+\beta)\bullet u=(\alpha+\beta)\bullet(x,y)=((\alpha+\beta)\,x,(\alpha+\beta)\,y)$$

$$=(\alpha x+\beta x,\alpha y+\beta y)=(\alpha x,\alpha y)+(\beta x,\beta y)$$

$$=\alpha\bullet(x,y)+\beta\bullet(x,y)=\alpha\bullet u+\beta\bullet v$$

8.

$$\alpha\bullet[u+v]=\alpha\bullet\left[(x,y)+\left(x',y'\right)\right]=\alpha\bullet\left(x+x',y+y'\right)$$

$$=\left(\alpha\left(x+x'\right),\alpha\left(y+y'\right)\right)=\left(\alpha x+\alpha x',\alpha y+\alpha y'\right)$$

$$=(\alpha x,\alpha y)+\left(\alpha x',\alpha y'\right)=\alpha\bullet(x,y)+\alpha\bullet\left(x',y'\right)$$

$$=\alpha\bullet u+\alpha\bullet v.$$

Conclusion : $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Exemple 2
Soit $\mathbb{R}^2$ muni des lois suivantes :
$(x,y)+\left(x',y'\right)=\left(x+x',y+y'\right)$ et $\lambda\bullet\left(x',y'\right)=(\lambda x,y)$.
$\mathbb{R}^2$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?
Pour la 7ème condition, on a

$$(\alpha+\beta)\bullet(x,y)=((\alpha+\beta)\,x,y)$$

$$=(\alpha x+\beta x,y)$$

et

$$\alpha\bullet(x,y)+\beta\bullet(x,y)=(\alpha x,y)+(\beta x,y)$$

$$=(\alpha x+\beta x,2y).$$

Alors,

$$(\alpha x+\beta x,y)\overset{??}{=}(\alpha x+\beta x,2y).$$

On peut prendre un contre exemple, on prend

$$(x,y)=(1,2)\,,\alpha=2\ \text{ et }\ \beta=3,$$

on trouve

$$(\alpha+\beta)\bullet(x,y)=(5,2)\quad\text{ et }\ \alpha\bullet(x,y)+\beta\bullet(x,y)=(5,4).$$

Donc, $\mathbb{R}^2$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3
Les ensembles suivants sont des $\mathbb{k}$-espaces vectoriels : $\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n,\mathbb{R}_n\,[X]$.

$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des fonctions polynomiale de degré inférieur ou égale à n.
Proposition 1
Soit E un $\mathbb{k}$ espace vectoriel. On a les propriétés suivantes :
1. $\forall u \in E, 0 \bullet u = 0_E$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \lambda \bullet 0_E = 0_E$.
3. $\forall u \in E, (-1) \bullet u = -u$
4. $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}, \lambda \bullet u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $u = 0_E$.
Démonstration
1. Soit $u \in E$,on a

$$u + 0 \bullet u = 1 \bullet u + 0 \bullet u = (1+0) \bullet u = 1 \bullet u = u,$$

et

$$0 \bullet u + u = 0 \bullet u + 1 \bullet u = (0+1) \bullet u = 1 \bullet u = u,$$

d'où $0 \bullet u$ est un élément neutre pour $+$ et par unicité, on a

$$0 \bullet u = 0_E.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{k}$,

$$0_E + 0_E = 0_E \Rightarrow \lambda \bullet (0_E + 0_E) = \lambda \bullet 0_E$$

$$\Rightarrow \lambda \bullet 0_E + \lambda \bullet 0_E = \lambda \bullet 0_E$$

$$\Rightarrow \lambda \bullet 0_E = 0_E.$$

3. Soit $u \in E$, on a

$$(-1) \bullet u + u = (-1) \bullet u + 1 \bullet u = (-1+1) \bullet u = 0 \bullet u = 0_E,$$

et

$$u + (-1) \bullet u = 1 \bullet u + (-1) \bullet u = (1-1) \bullet u = 0 \bullet u = 0_E,$$

donc,

$$(-1) \bullet u = -u.$$

4.
($\Leftarrow$) D'après (1) et (2) on déduit que si ($\lambda = 0$ ou $u = 0_E$), alors $\lambda \bullet u = 0_E$.
($\Rightarrow$) Soient $u \in E, \lambda \in \mathbb{k}$, supposons que $\lambda \bullet u = 0_E$. Si $\lambda \neq 0$, on a :

$$u = 1 \bullet u = \left(\tfrac{1}{\lambda}\lambda\right) \bullet u = \left(\tfrac{1}{\lambda}\right) \bullet (\lambda \bullet u) = \left(\tfrac{1}{\lambda}\right) \bullet 0_E = 0_E.$$

0.2 Sous Espace Vectoriel

Définition 3
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ et $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$.

Proposition 2

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ et $F \subset E$. Alors, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\begin{aligned} &1.\ F \neq \varnothing \quad (0_E \in F) \\ &2.\ \forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{k}, u + v \in F \\ &3.\ \forall u \in E, \forall \alpha \in \mathbb{k}, \alpha u \in F \end{aligned} \tag{3}$$

Exemple 4
Soient $E = \mathbb{R}^2, F = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. On a F est un s.e.v (Sous-Espace Vectoriel) de E.
Proposition 3
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ et $F \subset E$. Alors, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\begin{aligned} &1.\ F \neq \varnothing \\ &2.\ \forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}, \alpha u + \beta v \in F \end{aligned} \tag{4}$$

Exemple 5
Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0 \}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que E est un sous espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
(i). $F \neq \varnothing$, car $0_{\mathbb{R}^3} \in E$.
On a : $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ et $x_{0_{\mathbb{R}^3}} + y_{0_{\mathbb{R}^3}} - 2z_{0_{\mathbb{R}^3}} = 0 + 0 - 2 \times 0 = 0$.
(ii). $\forall u_1, u_2 \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}, \alpha u_1 + \beta u_2 \in E$
Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de E et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \in E?$$

On a :

$$u_1, u_2 \in E \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 - 2z_1 = 0 \\ x_2 + y_2 - 2z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha (x_1 + y_1 - 2z_1) = 0 \\ \beta (x_2 + y_2 - 2z_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) - 2 (\alpha z_1 + \beta z_2) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \in E,$$

de (i) et (ii) on déduit que E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.
Exemple 6
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + yz = 0 \}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^3$.
F est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
La deuxième condition n'est pas vérifiée, car pour

$$u = (2, -1, 2) \quad \text{et} \quad v = (-4, 2, 2),$$

on a

$$u, v \in F \quad \text{mais } u + v = (-2, 1, 4) \notin F.$$

Donc, F n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Proposition 4
Soient E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de s.e.v de E. *Alors, $\underset{i \in I}{\cap} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve :
Notons $F = \bigcap\limits_{i\in I} F_i$.
(i). $F \neq \varnothing$, en effet, $0_E \in F$ (puisque $\forall i \in I, 0_E \in F_i$).
(ii). Soient $u, v \in F$. Donc,

$$\forall i \in I, u \in F_i \quad et \quad v \in F_i.$$

Alors,

$$\forall i \in I, u + v \in F_i,$$

d'où

$$u + v \in \bigcap_{i\in I} F_i = F.$$

(iii). Soient $\lambda \in \mathbb{k}$ et u$\in F$. Donc,

$$\forall i \in I, \lambda u \in F_i.$$

Alors,

$$\lambda u \in \bigcap_{i\in I} F_i,$$

d'où

$$\lambda u \in F.$$

D'après (i) ,(ii) et (iii) on déduit que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ *est un sous-espace vectoriel de* E.
Remarque :
La réunion de sous espaces vectoriels n'est pas en général un sous espace vectoriel.
En effet, pour

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\},$$

on a : F_1 et F_2 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ mais $F_1 \cup F_2$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$, car pour

$$u = (0, 2) \quad \text{et} \quad v = (1, 0),$$

on a :

$$u, v \in F_1 \cup F_2 \text{ mas } u + v = (1, 2) \notin F_1 \cup F_2.$$