ESPACE VECTORIEL

0.1 Familles Libres-Génératrices

0.1.1 Combinaison linéaire

Définition 1
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\Bbbk$ espace vectoriel E. I est un ensemble d'indice fini ou infini. On appelle combinaison linéaire des vecteurs u_i, tout vecteur $X \in E$ de la forme :

$$X = \sum_{i\in J} \alpha_i u_i \tag{5}$$

où J est une partie finie de I et *$\alpha_i \in \Bbbk$.*
Exemple 1
Soient $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, -3, 1)$, $w = (0, 1, 5)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$2u - 3v + w = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On dit que le vecteur $X = (-1, 14, 4)$ est une combinaison linéaire des vecteurs u, v et w.
Notation :
Soient $u_1, u_2, ..., u_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel E. On note $Vect(u_1, u_2, ..., u_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n$.
Proposition 1
Soient $u_1, u_2, ..., u_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel E. L'ensemble $Vect(u_1, u_2, ..., u_n)$ est un sous espace vectoriel de E.
Preuve
(i). On a :

$$0_E = \sum_{i=1}^{n} (0) \times u_i, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0,$$

donc, $Vect(u_1, u_2, ..., u_n)$ contient le vecteur nul.
(ii). Soient $X, Y \in Vect(u_1, u_2, ..., u_n)$, donc $\exists (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \Bbbk^n$ tel que

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \quad \text{et} \quad Y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i,$$

d'où

$$X + Y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) u_i,$$

donc $X + Y$ est une combinaison linéaire de vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n$. Alors

$$X + Y \in Vect(u_1, u_2, ..., u_n).$$

(iii). Soient $X \in Vect(u_1, u_2, ..., u_n)$ et $\lambda \in \Bbbk$, donc $\exists (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \Bbbk^n$ tel que

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \ ,$$

d'où

$$\lambda X=\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda\alpha_i\right)u_i,$$

donc λX est une combinaison linéaire de vecteurs $u_1,u_2,...,u_n$. Alors

$$\lambda X\in Vect\left(u_1,u_2,...,u_n\right).$$

De (i),(ii) et (iii) on déduit que $Vect\left(u_1,u_2,...,u_n\right)$ est un sous espace vectoriel de E.
Remarque :
Pour $\alpha_i\in\mathbb{k}$, on a :

$$Vect\left(u_1,u_2,...,u_n,\sum_{i=1}^{n}\alpha_iu_i\right)=Vect\left(u_1,u_2,...,u_n\right).$$

0.1.2 Famille génératrice

Définition 2
Soit $F=\{u_1,u_2,.....,u_n\}$ une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{k}$ espace vectoriel E. On dit que la famille F est génératrice de E (ou que F engendre E) si tout élément u de E est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille F.
Exemple 2
Montrer que la famille $B=\{u=(2,0),v=(1,-3)\}$ engendre l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
Soit $w=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Est ce qu'il existe deux réels a et b tel que : $w=au+bv$?
On a :

$$w=au+bv\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ \\ y\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}2\\ \\ 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\ \\ -3\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2a+b\\ \\ y=-3b\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}y\right)\\ \\ b=-\frac{1}{3}y\end{array}\right..$$

Donc, pour tout vecteur $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on peut trouver deux scalaires $a=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}y\right)$ et $b=-\frac{1}{3}y$ tels que : $w=au+bv$.
Ce qui montre que B est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.
Exemple 3
Soit E un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x+y-2z=0\right\}.$$

Trouver une famille engendre E.
Soit $X=(x,y,z)\in E$, donc

$$x+y-2z=0\Leftrightarrow x=-y+2z,$$

$$X = (x, y, z) = (-y + 2z, y, z)$$
$$= (-y, y, 0) + (2z, 0, z)$$
$$= y\underbrace{(-1, 1, 0)}_{u_1} + z\underbrace{(2, 0, 1)}_{u_2}$$

Alors, la famille $\{u_1 = (-1, 1, 0), u_2 = (2, 0, 1)\}$ est génératrice de E.

$$E = Vect(u_1 = (-1, 1, 0), u_2 = (2, 0, 1)).$$

Propriété :
Dans $E = \mathbb{R}^n$, toute famille génératrice possède au minimum n vecteur.
Par exemple la famille $\{X_1 = (1, 1, 1), X_2 = (-2, 3, 1)\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$, car

$$Card(\{X_1, X_2\}) = 2 < 3.$$

0.1.3 Famille libre

Définition 3
Soit $F = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que la famille F est libre ou que les vecteurs $(u_i)_{i\in\{1,2,...,n\}}$ sont linéairement indépendants si et seulement si :

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{k},$$
$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0_E \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée (les vecteurs $(u_i)_{i\in\{1,2,...,n\}}$ sont linéairement dépendants). C'est à dire

$$\exists (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{k}^n - \{(0, 0, ..., 0)\},$$
$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0_E$$

Définition 4
Soient u, v deux vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que u et v sont colinéaires s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{k}$ tel que $u = \lambda v$.
Proposition 2
La famille $\{u, v\}$ est liée si seulement si les vecteurs u et v sont colinéaires.
Exemple 4
1. Montrer que la famille $B = \{u = (2, 0), v = (1, -3)\}$ est libre.
Soient α et β deux réels

$$\alpha u+\beta v=0_{\mathbb{R}^2}\Rightarrow \alpha\begin{pmatrix}2\\ \\ 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\ \\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2\alpha+\beta\\ \\ -\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{1}{2}\beta\\ \\ \beta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha=\beta=0$$

donc, B est une famille libre.
2. Montrer que la famille $B'=\{u_1=(2,0,1)\,,u_2=(1,-3,2)\,,u_3=(5,-3,4)\}$ est liée.
On cherche trois scalaires α_1,α_2 et α_3 tels que :

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}\quad \text{et } \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3=0_{\mathbb{R}^3}$$

Alors, on a :

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow \alpha_1\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}5\\ -3\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3\\ -3\alpha_2-3\alpha_3\\ \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3=0.......(1)\\ -3\alpha_2-3\alpha_3=0...........(2)\\ \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3=0.......(3)\end{cases}$$

De l'équation (2), on trouve

$$\alpha_2=-\alpha_3$$

On remplace α_2 dans l'équation (3), on obtient

$$\alpha_1-2\alpha_3+4\alpha_3=0\Leftrightarrow \alpha_1=-2\alpha_3$$

Maintenant, si on remplace α_1 et α_2 dans l'équation (1), on obtient $(0=0)$.
Alors, on peut choisir $\alpha_3=1$ (pour éviter $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\{(0,0,0)\}$). Donc on trouve $\alpha_1=-2$ et $\alpha_2=-1$.
Ce qui donne :

$$-2u_1-u_2+u_3=0_{\mathbb{R}^3},$$

cette relation appelée relation de dépendance.

Propriété :
Dans $E = \mathbb{R}^n$, toute famille libre possède au maximum n vecteur.
Par exemple la famille $\{X_1 = (1,1), X_2 = (-2,3), X_3 = (0,1)\}$ est liée, car

$$Card(\{X_1, X_2, X_3\}) = 3 > 2.$$

0.2 Base

Définition 5
Soit $F = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que la famille F forme une base de E si elle est à la fois génératrice et libre.

Théorème
Soit $F = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une base d'un espace vectoriel E. Tout vecteur X de E s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs de F.
Autrement dit : il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{k}$ unique tels que :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i.$$

$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ s'appellent les coordonnées du vecteur X dans la base F.
Preuve
Par définition, F est une famille génératrice de E, donc pour tout vecteur X de E, il existe $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{k}$ tels que

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i,$$

cela prouve la partie existence.
Pour montrer l'unicité des $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, supposons qu'il existe d'autres scalaires $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \mathbb{k}$ tels que

$$X = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i.$$

Alors, par différence on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) u_i = 0_E,$$

et comme la famille F est libre, alors

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = ... = \alpha_n - \beta_n = 0,$$

donc,

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n.$$

Exemple 5
1. Montrer que la famille $B_0 = \{P_1 = 1 + X, P_2 = 2X, P_3 = X - X^2\}$ forme une base de

$\mathbb{R}_2[X]$.
B_0 est-elle libre ?
Soient α_1, α_2 et α_3 des réels

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Rightarrow \alpha_1 (1+X) + \alpha_2 (2X) + \alpha_3 (X - X^2) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) X + (-\alpha_3) X^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

donc, B_0 est une famille libre.
B_0 est-elle génératrice ?
Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ où $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Est ce qu'il existe trois réels a, b et c tels que : $P = aP_1 + bP_2 + cP_3$?
on a :

$$P = aP_1 + bP_2 + cP_3 \Leftrightarrow a_0 + a_1 X + a_2 X^2 = a(1+X) + b(2X) + c(X - X^2)$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1 X + a_2 X^2 = a + (a + 2b + c) X + (-c) X^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a_0 \\ a + 2b + c = a_1 \\ -c = a_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a_0 \\ b = \frac{-a_0 + a_1 + a_2}{2} \\ c = -a_2 \end{cases}$$

Donc, pour tout $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, on peut trouver trois scalaires $a = a_0, b = \frac{-a_0 + a_1 + a_2}{2}$ et $c = -a_2$ tels que : $P = aP_1 + bP_2 + cP_3$.
Ce qui montre que B' est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
Alors B' forme une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit le sous espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0\}$$

Déterminer une base de E.
Soit $k = (x, y, z) \in E$, alors :

$$x + 2y - z = 0 \Rightarrow z = x + 2y$$

donc

$$k = (x, y, z) = (x, y, x + 2y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2)$$

$$= xu + yv$$

E est génératrice par la famille $\{u=(1,0,1)\,,v=(0,1,2)\}$
Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, on a :

$$\alpha u+\beta v=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\beta\\2\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha=0\\\beta=0\\\alpha+2\beta=0\end{array}\right.\Rightarrow\alpha=\beta=0$$

alors la famille $\{u=(1,0,1)\,,v=(0,1,2)\}$ est libre.
Donc, elle forme une base de E.
Exemple 6 (Base canonique)
1. De $\mathbb{R}^2$: Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$
On a :

$$u=(x,y)=(x,0)+(0,y)=x\,(1,0)+y\,(0,1)\,.$$

posons $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$. La famille $B_0=\{e_1\,(1,0)\,,e_2\,(0,1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ et comme les vecteurs e_1,e_2 ne sont pas colinéaires (Car il n'existe pas un scalaire $\lambda\in\mathbb{k}=\mathbb{R}$ tel que $e_1=\lambda e_2$), alors la famille B_0 est libre, donc elle forme une base de $\mathbb{R}^2$ applée la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est :

$$\left\{e_1\,(1,0,...,0)\,,e_2\,(0,1,0,...,0)\,,...,e_i=\left(0,...,0,\underbrace{1}_{\text{i}^{\text{ème}}\text{ coordonnée}},0,...,0\right),e_n\,(0,0,...,0,1)\right\}.$$

3. La base canonique de $\mathbb{R}_n\,[X]$ est :

$$\{P_0=1,P_1=X,...,P_n=X^n\}\,.$$