APPLICATIONS LINEAIRES

0.1 Définitions et Propriétés

Dans cette section, E et F sont des $\mathbb{k}-$espaces vectoriels.

Définition 1
1. *Une application linéaire de E dans F (ou morphisme de* $\mathbb{k}$-ev) *est une application $f : E \to F$ telle que :*

$$1. \qquad f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$2. \qquad f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

pour tous les éléments $u, v \in E$ et tout $\alpha \in \mathbb{k}$.
On note $L(E,F)$ (ou $L_{\mathbb{k}}(E,F)$) l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

2. *On dit que $f : E \to E$ est un endomorphisme de E si et seulement si f est linéaire.*
On note $L(E)$ (ou $L_{\mathbb{k}}(E)$) l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemple 1 Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que :

$$f(x,y) = (x-y, 2x, -x+3y)$$

Pour tous $u = (x,y), v = (x',y') \in \mathbb{R}^2$ *et tout* $\alpha \in \mathbb{k} = \mathbb{R}$ on a :

$$f(u+v) = f(x+x', y+y')$$

$$= ((x+x') - (y+y'), 2(x+x'), -(x+x') + 3(y+y'))$$

$$= (x-y, 2x, -x+3y) + (x'-y', 2x', -x'+3y')$$

$$= f(x,y) + f(x',y')$$

$$= f(u) + f(v)$$

et

$$f(\alpha u) = f(\alpha x, \alpha y)$$

$$= (\alpha x - \alpha y, 2\alpha x, -\alpha x + 3\alpha y)$$

$$= \alpha (x-y, 2x, -x+3y)$$

$$= \alpha f(x,y)$$

$$= \alpha f(u)$$

D'où f est une application linéaire.

Exemple 2
Soit l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que :

$$g\left(x, y\right) = \left(x - y, xy\right)$$

On vérifie que cette applications n'est pas linéaire. (c'est à dire l'une des deux conditions n'est pas vérifiée ou les deux conditions ne sont pas vérifiées).
Par exemple si on prend les deux vecteurs suivant $u = (1, 2)$ et $v = (3, -5)$, on a :

$$g\left(u + v\right) = g\left(4, -3\right) = \left(7, -12\right)$$

et

$$g\left(u\right) + g\left(v\right) = \left(-1, 2\right) + \left(8, -15\right) = \left(7, -13\right)$$

ce qui montre que l'application g n'est pas linéaire.
On remarque aussi que la deuxième condition n'est pas vérifié. (On peut prendre $u = (5, 2)$ et $\alpha = 3$).

Définition 2
1. *On dit que $f : E \to F$ est un isomorphisme de E* sur *F si et seulement si f est linéaire et bijective.*

2. On dit que $f : E \to E$ est un automorphisme de E si et seulement si f est linéaire et bijective.

3. *Si $F = \mathbb{k}$, on dit que f est une forme linéaire sur E.*

Remarque 1 *Si on prend $\alpha = 0$ dans* (2.1)*, alors on trouve $f(0_E) = 0_F$. Donc si $f(0_E) \neq 0_F$, on dit que l'application f n'est pas linéaire.*

Exemple 3
Soit l'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que :

$$h\left(x, y\right) = \left(x - y, y + 2\right)$$

On a :

$$h\left(0_E\right) = h\left(0, 0\right) = \left(0, 2\right) \neq 0_F$$

Donc, l'application h n'est pas linéaire.

Propriété 1
On dit que l'application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si pour tous les éléments $u, v \in E$ et tous les scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$, on a :

$$f\left(\alpha u + \beta v\right) = \alpha f\left(u\right) + \beta f\left(v\right) \tag{5}$$

Propriété 2
Soient f, g deux applications linéaires de E dans F et $\lambda \in \mathbb{k}$. Les applications $f + g$ et λf définies par $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$ et $(\lambda f)(u) = \lambda f(u)$ sont linéaires.

Preuve :
Soient u, v des vecteurs de E et α, β des scalaires de $\Bbbk$. On a alors :

$$(f+g)(\alpha u+\beta v)=f(\alpha u+\beta v)+g(\alpha u+\beta v)$$

$$=\alpha f(u)+\beta f(v)+\alpha g(u)+\beta g(v)$$

$$=\alpha(f(u)+g(u))+\beta(f(v)+g(v))$$

$$=\alpha(f+g)(u)+\beta(f+g)(v)$$

d'où l'application $f+g$ est linéaire.
Et on a aussi :

$$(\lambda f)(\alpha u+\beta v)=\lambda f(\alpha u+\beta v)$$

$$=\lambda(\alpha f(u)+\beta f(v))$$

$$=\alpha(\lambda f(u))+\beta(\lambda f(v))$$

$$=\alpha(\lambda f)(u)+\beta(\lambda f)(v)$$

ce qui montre que λf est linéaire.

Propriété 3
Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ *deux applications linéaires. L'applications* $g \circ f$ *est linéaire.*

Preuve :
Soient u, v des vecteurs de E et α, β des scalaires de $\Bbbk$. On a alors :

$$(g \circ f)(\alpha u+\beta v)=g(f(\alpha u+\beta v))$$

$$=g(\alpha f(u)+\beta f(v))$$

$$=\alpha g(f(u))+\beta g(f(v))$$

$$=\alpha(g \circ f)(u)+\beta(g \circ f)(v)$$

d'où l'application $g \circ f$ est linéaire.

0.2 Image et Noyau

Proposition 1
Soient E, F *deux* $\Bbbk$*-ev et* $f \in L(E, F)$.
1. Pour tout sev F_1 *de* F*, l'image réciproque* $f^{-1}(F_1)$ *est un sev de* E.
2. Pour tout sev E_1 *de* E*, l'image directe* $f(E_1)$ *est un sev de* F.
Preuve

(1).
(1.a) $f^{-1}(F_1) \neq \emptyset$: $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in f^{-1}(F_1)$
(1.b) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ et $(u, v) \in (f^{-1}(F_1))^2$. On a :

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \in F_1$$

et donc

$$\alpha u + \beta v \in f^{-1}(F_1)$$

D'aprés (1.a) et (1.b) on déduit que $f^{-1}(F_1)$ est un sev de E.
(2).
(2.a) $f(E_1) \neq \emptyset$: $f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in f(E_1)$
(2.b) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ et $(X, Y) \in (f(E_1))^2$. Il existe $(x, y) \in (E_1)^2$ tel que :

$$X = f(x) \quad \text{et} \quad Y = f(y)$$

On a :

$$\alpha X + \beta Y = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

$$= f(\alpha x + \beta y) \in f(E_1)$$

D'aprés (2.a) et (2.b) on déduit que $f(E_1)$ est un sev de F.

Définition 3
Soient E, F deux $\mathbb{k}$-ev et $f \in L(E, F)$.
On appelle image de f et on note $\mathrm{Im}(f)$, le sous espace vectoriel de F défini par :

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F; \exists x \in E, y = f(x)\}$$

Définition 4
Soient E, F deux $\mathbb{k}$-ev et $f \in L(E, F)$.
On appelle noyau de f et on note $\ker(f)$, le sous espace vectoriel de E défini par :

$$\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$$

Exemple 4
On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, y - 2z) \end{array}$$

Déterminer l'image de f et le noyau de f.
Noyau de f :
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}$

On a :

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \Longleftrightarrow (x+y, y-2z) = (0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=2z \end{cases}$$

Alors,

$$u = (x,y,z) = (-2z, 2z, z) = z(-2,2,1)$$

Donc, $\ker(f)$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $X = (-2,2,1)$.

$$\ker(f) = Vect(X = (-2,2,1))$$

Image de f :
Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$f(u) = (x+y, y-2z)$$

$$= (x,0) + (y,y) + (0,-2z)$$

$$= x(1,0) + y(1,1) + z(0,-2)$$

Donc, $\mathrm{Im}(f)$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par les vecteurs $Y = (1,0)$, $Z = (1,1)$ et $T = (0,-2)$.

$$\mathrm{Im}(f) = Vect(Y = (1,0), Z = (1,1), T = (0,-2))$$

Proposition 2
Soient E, F deux $\mathbb{k}$-ev et $f \in L(E,F)$.
1. f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$
2. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$
Preuve
1) $(\Rightarrow)$ Supposons que f est injective. Soit $u \in \ker(f)$. Alors

$$f(u) = 0_F = f(0_E)$$

d'où puisque f est injective, alors $u = 0_E$. Ainsi $\ker(f) = \{0_E\}$.
$(\Leftarrow)$ Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$. Soient $u, v \in E$ tel que $f(u) = f(v)$. Alors,

$$f(u) = f(v) \Longleftrightarrow f(u) - f(v) = 0_F$$

$$\Longleftrightarrow f(u-v) = 0_F$$

et donc

$$u - v \in \ker(f) = \{0_E\}$$

D'où

$$u = v$$

2)

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective } &\iff \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x) \\ &\iff f(E) = F \\ &\iff \operatorname{Im}(f) = F \end{aligned}$$

0.3 Rang d'une Application Linéaire

Définition 5
Soient E, F deux $\mathbb{k}$-ev de dimension finie et $f \in L(E, F)$.
On appelle rang de f et on note $rg(f)$, l'entier naturel défini par :

$$rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$$

Théorème 1 (Théorème du rang)
Soient E, F deux $\mathbb{k}$-ev de dimension finie et $f \in L(E, F)$.
On a :

$$rg(f) = \dim E - \dim(\ker f)$$

Exemple 5
On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & (2-X)P' - P \end{array}$$

Déterminer le rang de f.
On a :

$$rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$$

Image de f :
Soit $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned} f(P) &= (2-x)P' - P \\ &= (2-x)(a_1 + 2a_2x) - (a_0 + a_1x + a_2x^2) \\ &= 2a_1 - a_0 + (-2a_1 + 4a_2)x - 3a_2x^2 \\ &= (-a_0) \times 1 + (2a_1) \times (1-x) + (-3a_2) \times x^2 \end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Im}\,(f)$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par $P_0 = 1, P_1 = 1 - x$ et $P_2 = x^2$.

$$\mathrm{Im}\,(f) = Vect\,(P_0, P_1, P_2)$$

Comme la famille $\{P_0 = 1, P_1 = 1 - x, P_2 = x^2\}$ est libre, car pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \Bbbk = \mathbb{R}$ on a

$$\alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Alors, cette famille forme une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et de plus $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 3$. Ce qui donne $rg\,(f) = 3$.

0.4 Inverse d'une Application Linéaire

Définition 6
Soient E, F deux $\Bbbk$-ev et $f \in L(E,F)$.
L'application $f : E \to F$ est dite inversible si, pour tout $Y \in F$, l'équation $Y = f(X)$ admet une unique solution $X \in E$.

Exemple 6
- Lapplication $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \ln(x+y)$ n'est pas inversible, car il existe $Y = -3 \in F = \mathbb{R}$ tel que l'équation $-3 = f(x,y)$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{R}^2$.
- Lapplication $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x,y) = (x^2, y)$ n'est pas inversible, car il existe $Y = (1,2) \in F = \mathbb{R}^2$ tel que l'équation $(1,2) = f(x,y)$ admet deux solutions $(1,2)$ et $(-1,2)$ dans $\mathbb{R}^2$.
- Lapplication $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(x,y,z) = (x+y, y, x-2z)$ est inversible, car *pour tout $Y \in F = \mathbb{R}^3$, l'équation $Y = f(X)$ admet une unique solution $X \in E = \mathbb{R}^3$.*

Définition 7
Soient E, F deux $\Bbbk$-ev et $f \in L(E,F)$ inversible. Alors sa réciproque $f^{-1} : F \to E$ est définie par

$$f^{-1}(Y) = (\text{l'unique } X \in E \in \text{ tel que } Y = f(X)\ )$$

et on a ;

$$\forall X \in E : f^{-1}(f(X)) = X$$

et

$$\forall Y \in F : f(f^{-1}(Y)) = Y$$

c'est à dire

$$f^{-1} \circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = Id_F$$

Exemple 6
On considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y, x-2z) \end{array}$$

Soit $Y=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ tel que $Y=f(X)$.
On a :

$$Y=f(X)\Leftrightarrow(x',y',z')=f\left(x,y,z\right)=(x+y,y,x-2z)$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y=x' \\ \\ y=y' \\ \\ x-2z=z' \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=x'-y=x'-y' \\ \\ y=y' \\ \\ z=\frac{1}{2}\left(x-z'\right)=\frac{1}{2}\left(x'-y'-z'\right) \end{array}\right.$$

Donc, pour tout vecteur $Y=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$, il existe un unique élément $X=\left(x'-y',y',\frac{1}{2}\left(x'-y'-z'\right)\right)$ $\mathbb{R}^3$ tel que $Y=f(X)$.
Alors l'application f est inversible et sa réciproque définie par :

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \\ & (x',y',z') & \longmapsto & \left(x'-y',y',\frac{1}{2}\left(x'-y'-z'\right)\right) \end{array}$$