MATRICES

0.1 Egualité de deux matrices

Définition 1
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ *et* $A = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ *deux matrices de* $M_{n,m}(\mathbb{k})$. *On dit que* $A = B$ *si tous les éléments de* A *sont égaux au éléments correspondants de* B.

Exemple 1
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ 0 & y+x & 7 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Déterminons x et y pour que les deux matrices soient égales.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \\ y = -5 \end{cases}$$

0.2 Transposée d'une matrice

Définition 2
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ *une matrice de* $M_{n,m}(\mathbb{k})$. *On appelle transposée de* A *la matrice* $(a_{ji})_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1\leq i\leq n}}$ *de* $M_{m,n}(\mathbb{k})$ *et on note* ${}^tA$

$${}^tA = (a_{ji})_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1\leq i\leq n}}$$

Exemple 2
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Propriété 1
Soient A *et* B *deux matrices de* $M_{n,m}(\mathbb{k})$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{k}$. *Alors, on a :*

$${}^t({}^tA) = A \quad , \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA \qquad \text{et} \qquad {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB.$$

Propriété 2
Soient A *une matrices de* $M_{n,m}(\mathbb{k})$ *et* B *une matrices de* $M_{m,p}(\mathbb{k})$. *Alors, on a :*

$${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA)$$

0.3 Opérations sur les Matrices

0.3.1 Multiplication par un scalaire

Définition 3
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ *une matrice de* $M_{n,m}(\mathbb{k})$ *et* $\lambda \in \mathbb{k}$. Le produit de A par λ est la matrice λA *de* $M_{n,m}(\mathbb{k})$ définie par

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}.$$

Exemple 3
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

alors,

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 9 & 15 & -12 \end{pmatrix}$$

0.3.2 Somme de deux matrices

Définition 4
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ *deux matrices de* $M_{n,m}(\mathbb{k})$. *La somme des matrices* A *et* B *est la matrice* $A+B$ *de* $M_{n,m}(\mathbb{k})$ *définie par*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}.$$

Exemple 4
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

alors, on a :

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$A - B = A + (-1) \times B = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 7 & 0 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Propriété 3
Soient A, B *et* C *trois matrices ayant la même dimension,* α *et* β *deux scalaires.*
1. $A + B = B + A$ *qui caractérise la commutativité de l'addition matricielle.*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *qui caractérise l'associativité de l'addition matricielle.*
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
4. $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$

0.3.3 Produit de deux matrices

Définition 5
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ *une matrice de* $M_{n,m}(\mathbb{k})$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq p}}$ *une matrice de* $M_{m,p}(\mathbb{k})$. *Le produit des matrices* A *et* B *est la matrice* $A \times B$ *de* $M_{n,p}(\mathbb{k})$ *définie par*

$$A \times B = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$$

avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \times b_{kj}$$

Exemple 5
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

alors, on a :

$$A \times B = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 3}}$$

Donc,

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} \times b_{k1} = 0 \quad , \quad c_{12} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} \times b_{k2} = -1 \quad , \quad c_{13} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} \times b_{k3} = 3$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k} \times b_{k1} = 3 \quad , \quad c_{22} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k} \times b_{k2} = 4 \quad , \quad c_{23} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k} \times b_{k3} = 3$$

$$c_{31} = \sum_{k=1}^{2} a_{3k} \times b_{k1} = 7 \quad , \quad c_{32} = \sum_{k=1}^{2} a_{3k} \times b_{k2} = 9 \quad , \quad c_{33} = \sum_{k=1}^{2} a_{3k} \times b_{k3} = 8$$

Alors,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Remarque 1
Le produit matriciel de matrices n'est pas commutatif.
Exemple 6
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

alors, on a :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad et \qquad BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous voyons bien que le produit matriciel n'est pas commutatif : $AB \neq BA$.
Propriété 4

Soient A, B et C trois matrices. Si les opérations indiquées existent, alors on admettra les égalités suivantes :
1. $A + B = B + A$
2. $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$
3. $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$
4. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

Définition 6
Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n et k un entier naturel non nul. On définit la puissance k-ème de A comme suit :

$$A^k = \underbrace{A \times A \times A \times ...... \times A}_{k \text{ fois la matrice } A}$$

$$A^0 = I_n$$

Exemple 7
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

alors, on a :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 & 84 \\ 42 & 33 \end{pmatrix}$$

0.4 Inversion d'une matrice

Définition 7
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{k})$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice B de $M_n(\mathbb{k})$ telle que $AB = BA = I_n$. On note $A^{-1} = B$.

Exemple 8
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \times 3 + 5 \times (-1) & 2 \times (-5) + 5 \times 2 \\ 1 \times 3 + 3 \times (-1) & 1 \times (-5) + 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 3 \times 2 + (-5) \times 1 & 3 \times 5 + (-5) \times 3 \\ (-1) \times 2 + 2 \times 2 & (-1) \times 5 + 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible d'inverse B. $A^{-1} = B$.

Propriété 5
Soit A une matrice carrée inversible. Alors,

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Proposition 1
Soient A et B deux matrices carrées inversibles de même dimension. Alors,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Preuve
Il suffit de montrer que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I.$
On a :

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

et

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Proposition 2
Soit A une matrice carrée d'ordre deux définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec $ad - cb \neq 0$.
Alors, A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-cb} & -\frac{b}{ad-cb} \\ -\frac{c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{pmatrix}$$

Preuve
On vérifie que $AA^{-1} = A^{-1}B = I_2$.

Méthode de Gauss pour inverser une matrice
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{k})$. Cette méthode consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I_n. Ces opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A sont :

$$L_i \leftarrow \lambda L_i \quad , \quad \lambda \neq 0$$

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \quad , \quad \lambda \in \mathbb{k} \text{ et } j \neq i$$

Donc pour appliquer cette méthode, à coté de la matrice A, on rajoute la matrice identité pour former le tableau suivant :

$$(A|I_n) : \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} & 1 & 0 & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & 0 & 1 & . & . & . \\ . & & . & & . & . & & . & & . \\ . & & & . & . & . & & & . & . \\ a_{n1} & & . & . & a_{nn} & 0 & 0 & . & . & 1 \end{array}\right)$$

Sur les lignes de cette matrice (appelée matrice augmentée), on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau

$$(I_n|B) : \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & . & . & 0 & b_{11} & b_{12} & . & . & b_{1n} \\ 0 & 1 & . & . & . & b_{21} & b_{22} & . & . & . \\ . & & . & & . & . & & . & & . \\ . & & & . & . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & b_{n1} & & . & . & b_{nn} \end{array}\right)$$

Alors, $A^{-1} = B$.

Exemple 9

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Voici la matrice augmentée

$$(A|I_2) : \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On effectue les opérations élémentaires suivantes $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, alors, on touve la nouvelle matrice augmentée suivante

$$\left(A^{(1)}|B^{(1)}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \end{array}$$

On multiplie la ligne $L_2^{(1)}$ par $\left(-\frac{1}{5}\right)$ (c'est à dire $L_2^{(1)} \leftarrow \left(-\frac{1}{5}\right) L_2^{(1)}$, on obtient

$$\left(A^{(2)}|B^{(2)}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ L_3^{(2)} \end{array}$$

on effectue l'opération élémentaire suivante $L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(2)} + 3L_3^{(2)}$, alors, on touve

$$\left(A^{(3)}|B^{(3)}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1^{(3)} \\ L_2^{(3)} \\ L_3^{(3)} \end{array}$$

On multiplie la ligne $L_3^{(3)}$ par $\left(-\frac{5}{2}\right)$ (c'est à dire $L_3^{(3)} \leftarrow \frac{5}{2} L_3^{(3)}$, on obtient

$$\left(A^{(4)}|B^{(4)}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1^{(4)} \\ L_2^{(4)} \\ L_3^{(4)} \end{array}$$

on effectue les opérations élémentaires suivantes $L_2^{(4)} \leftarrow L_2^{(4)} - \frac{1}{5} L_3^{(4)}$ et $L_1^{(4)} \leftarrow L_1^{(4)} - L_3^{(4)}$, alors, on touve

$$\left(A^{(5)}|B^{(5)}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1^{(5)} \\ L_2^{(5)} \\ L_3^{(5)} \end{array}$$

on effectue l'opération élémentaire suivante $L_1^{(5)} \leftarrow L_1^{(5)} - 2L_2^{(5)}$, alors, on touve

$$\left(A^{(6)}|B^{(6)}\right) : \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} L_1^{(6)} \\ L_2^{(6)} \\ L_3^{(6)} \end{array}$$

Par cnséquent,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$