MATRICES

0.1 Matrice de passage

Définition 1
Etant donnée deux bases $B = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ *et* $B' = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ *d'un espace vectoriel* E*, chacun des vecteurs de la deuxième base a des coordonnées dans la première, notons* p_{ij} *la i-ème coordonnée de* v_j *dans la base* B.

$$v_j = p_{1j}u_1 + p_{2j}u_2 + p_{3j}u_3 + ... + p_{nj}u_n$$

La matrice carrée P *de coefficients* p_{ij} *est appelée matrice de passage de* B *à* B'. On la note $P = M_{B',B}(Id)$

Exemple 1
Soient $B = \{u_1 = (1,2,3), u_2 = (0,1,4), u_3 = (3,0,1)\}$ et $B' = \{v_1 = (-1,0,5), v_2 = (0,1,2), v_3 = (3,-2$
deux bases de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{array}{lcl} u_1 = -\frac{2}{5}v_1 + \frac{12}{5}v_2 + \frac{1}{5}v_3 & & v_1 = -u_1 + 2u_2 \\ u_2 = \frac{3}{10}v_1 + \frac{6}{5}v_2 + \frac{1}{10}v_3 & \text{et} & v_2 = \frac{3}{8}u_1 + \frac{1}{4}u_2 - \frac{1}{8}u_3 \\ u_3 = -\frac{3}{5}v_1 + \frac{8}{5}v_2 + \frac{4}{5}v_3 & & v_3 = -\frac{3}{2}u_1 + u_2 + \frac{3}{2}u_3 \end{array}$$

Alors, la matrice de passage de B *à* B' est

$$M_{B',B}(Id) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{2} \\ 2 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage de B' *à* B est

$$M_{B,B'}(Id) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{3}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que

$$(M_{B,B'}(Id)) \times (M_{B',B}(Id)) = I_3$$

C'est à dire

$$M_{B,B'}(Id) = (M_{B',B}(Id))^{-1}$$

0.2 Formule de changement de base pour une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoreils. E est muni de deux bases B_E et B'_E. F est muni de deux bases B_F et B'_F. On note P (respectivement Q) la matrice de passage de B_E et B'_E (respectivement B_F et B'_F). Soit f une application linéaire de E dans F. On suppose $A = M_{B_E,B_F}(f)$ et $B = M_{B'_E,B'_F}(f)$. Alors :

$$B = Q^{-1}A$$

$$\begin{array}{ccc} (E, B'_E) & \underset{B}{\overset{f}{\rightarrow}} & (F, B'_F) \\ Id_E \downarrow P & & Id_F \uparrow Q^{-1} \\ (E, B_E) & \underset{A}{\overset{f}{\rightarrow}} & (F, B_F) \end{array}$$

Si $E = F$, alors on a :

$$B = P^{-1}AP$$

Exemple 2
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - 2z, x + y + 3z)$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Soient $B_1 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ et $B_2 = \{e'_1 = (1, 0), e'_2 = (0, 1)\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. On considère $B'_1 = \{u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (0, 1, 4), u_3 = (3, 0, 1)\}$ et $B'_2 = \{v_1 = (3, 0), v_2 = (1, 2)\}$ les bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
Alors, on a :

$$A = M_{B_1,B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$B = M_{B'_1,B'_2}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} & -\frac{29}{6} & -\frac{4}{3} \\ 6 & \frac{13}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de de B_1 *à* B'_1 est

$$P = M_{B'_1,B_1}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de de B'_2 *à* B_2 est

$$Q^{-1} = M_{B_2,B'_2}(Id) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

0.3 Rang d'une matrice

Définition 2
On définit le rang d'une matrice comme étant le rang de ces vecteurs colonnes ou ces vecteurs lignes.
Exemple 3
Le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

est par définition le range de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

$$B = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Ces vecteurs sont linéairement dépendants, car $2u_1 - u_2 = u_3$ et comme la famille

$$\left\{ u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

est libre, alors le rang de la famille B est 2.
Proposition 1
Le rang d'une matrice ayant les colonnes $C_1, C_2, ..., C_n$ n'est pas modifié par les trois opérations élémentaires suivantes sur les vecteurs :
1. On peut multiplier une colonnes par un scalaire non nul. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ *avec* $\lambda \neq 0$.
2. On peut ajouter à la colonne C_i *un multiple d'une autre colonne* C_j. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ *avec* $\lambda \in \mathbb{k}$ et $i \neq j$.
3. On peut échanger deux colonnes. $C_i \leftrightarrow C_j$.