RESOLUTION DE SYSTEMES D'EQUATIONS

0.1 Système d'Equations

Définition 1
Un système de n équations linéaires à p inconnues est une liste de n équations linéaires. Il est de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \dots & \dots & +a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \dots & .. & +a_{2p}x_p & = b_2 \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \dots & .. & +a_{ip}x_p & = b_i \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \dots & .. & +a_{np}x_p & = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Les nombres a_{ij} sont les coefficient du système.
On peut écrire (S) sous forme matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots. & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots. & a_{2p} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots. & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \tag{2}$$

On appelle $A \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ la matrice des coefficients du système. $B \in M_{n,1}(\mathbb{k})$ est le vecteur de seconde membre.
Le vecteur $X \in M_{p,1}(\mathbb{k})$ est une solution du système si et seulement si

$$AX = B \tag{3}$$

Définition 2 La matrice augmentée associée au système (1) est défini par

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2p} & b_2 \\ . & . & & . & . \\ . & & & . & . \\ & & . & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{np} & b_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

Exemple 1

Résoudre le système suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ \\ x - 3y = 6 \end{cases} \tag{5}$$

C'est un système de deux équations à deux inconnues x et y. La forme matricielle de (S_1) est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

admet la solution

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \\ -1 \end{pmatrix}$$

0.2 Résolution par la méthode de Gauss

Quelques soient les valeurs n et p du système, on peut déterminer ses solutions par la méthode d'élimination de Gauss.

Le principe en est le suivant :

Par des combinaisons linéaires succéssives, on transforme le système initial, que l'on prend tel quel sans changer l'ordre des équations, en un système triangulaire supérieur (la matrice associée est triangulaire supérieur), système ensuite résolu en commençant par la dernière des équations transformées.

Exemple 2

Résoudre le système suivant :

$$(S_2) : \begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \;\; \text{........... (Eq1)} \\ \\ 3x - y - z = 4 \;\; \text{............... (Eq2)} \\ \\ 7x - 5y - 2z = 3 \;\; \text{........... (Eq3)} \end{cases} \tag{6}$$

C'est un système de trois équations à trois inconnues x, y et z. La forme matricielle de (S_2) est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \\ 3 & -1 & -1 \\ \\ 7 & -5 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \\ y \\ \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ \\ 4 \\ \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Dans la première étape de la méthode, on élimine l'inconnue x dans les équations Eq2 et Eq3. Donc on remplaçe l'équation (Eq2) par (Eq2)-3(Eq1) et (Eq3) par (Eq3)-7(Eq1).

Aprés cette première étape, on obtient le système équivalent :

$$(S_2^{'}) : \begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \quad \text{..........} \ (\text{Eq1}) \\ \\ \quad - 7y - 10z = 16 \quad \text{......} \ (\text{Eq2}^{'}) \\ \\ \quad - 19y - 23z = 31 \ \text{....} \ (\text{Eq3}^{'}) \end{cases} \tag{7}$$

Dans la deuxième étape, la deuxième ligne qui joue le rôle de pivot si y est présent (sinon on permute (Eq2$^{'}$) par (Eq3$^{'}$)). Pour éliminer y dans l'équation (Eq3$^{'}$), on remplaçe celle-ci par (Eq3$^{'}$)$-\frac{-19}{-7}$(Eq2$^{'}$). On obtient alors le systéme équivalent, triangulaire supérieur, suivant :

$$(S_2^{''}) : \begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \quad \text{..........} \ (\text{Eq1}) \\ \\ \quad - 7y - 10z = 16 \quad \text{......} \ (\text{Eq2}^{'}) \\ \\ \qquad \frac{29}{7} z = -\frac{87}{7} \ \text{....} \ (\text{Eq3}^{''}) \end{cases} \tag{8}$$

On résout le système par **"remontée"** en commençant par la dernière équation.
(Eq3$^{''}$) donne $z = -3$.
(Eq2$^{'}$) donne $y = -\frac{1}{7}\,(10z + 16) = 2$.
(Eq1) donne $x = -2y - 3z - 4 = 1$.
Donc, la solution du (S_2) est

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 2 \\ \\ -3 \end{pmatrix}$$

Remarque 1

♦ Pour n équations, il y aura $n - 1$ étapes.

♦ Si on trouve, dans la deuxième étape, le coéfficient de x_2 égale à zéro, alors on permute (Eq2$^{'}$) par (Eq3$^{'}$) où le coéfficient de x_2 est différent à zéro et on va faire même chose pour les autres étapes.

Exemple 3

Résoudre le système suivant :

$$(S_3) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{......................} \ (\text{Eq1}) \\ \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \quad \text{...............} \ (\text{Eq2}) \\ \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 4 \qquad \text{........} \ (\text{Eq3}) \\ \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 = 8 \quad \text{..........} \ (\text{Eq4}) \end{cases}$$

Dans la première étape de la méthode, on élimine l'inconnue x_1 dans les équations Eq2,Eq3 et Eq4. Donc on remplaçe l'équation (Eq2) par (Eq2)$-$(Eq1) et l'équation (Eq3) par

(Eq3)−(Eq1) et l'équation (Eq4) par (Eq4)−(Eq1). Aprés cette première étape, on obtient le système équivalent :

$$(S_3^{'}) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \ (\text{Eq1}) \\ \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \ \dots\dots\dots\dots \ (\text{Eq2}^{'}) \\ \\ 3x_2 + 8x_3 + 15x_4 = 4 \ \dots\dots\dots \ (\text{Eq3}^{'}) \\ \\ 7x_2 + 26x_3 + 63x_4 = 8 \ \dots\dots\dots\dots \ (\text{Eq4}^{'}) \end{cases}$$

Dans la deuxième étape, la deuxième ligne qui joue le rôle de pivot. Pour éliminer x_2 dans les équations (Eq3$^{'}$) et (Eq4$^{'}$), on remplaçe l'équation (Eq3$^{'}$) par (Eq3$^{'}$)−3(Eq2$^{'}$) et l'équation (Eq4$^{'}$) par (Eq4$^{'}$)−7(Eq2$^{'}$) . On obtient alors le systéme équivalent, triangulaire supérieur, suivant :

$$\left(S_3^{''}\right) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ (\text{Eq1}) \\ \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \ \dots\dots\dots\dots\dots \ (\text{Eq2}^{'}) \\ \\ 2x_3 + 6x_4 = -2 \ \dots\dots\dots \ (\text{Eq3}^{''}) \\ \\ 12x_3 + 42x_4 = -6 \ \dots\dots\dots \ (\text{Eq4}^{''}) \end{cases}$$

Dans la troisième étape, la troisième ligne qui joue le rôle de pivot. Pour éliminer x_3 dans l'équations (Eq4$^{''}$), on remplaçe celle-ci par (Eq4$^{''}$)−6(Eq3$^{''}$). On obtient alors le systéme équivalent suivant :

$$(S_3^{'''}) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \ (\text{Eq1}) \\ \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \ \dots\dots\dots\dots \ (\text{Eq2}^{'}) \\ \\ 2x_3 + 6x_4 = -2 \ \dots\dots\dots\dots \ (\text{Eq3}^{''}) \\ \\ 6x_4 = 6 \ \dots\dots\dots \ (\text{Eq4}^{'''}) \end{cases}$$

On résout le système par **"remontée"** en commençant par la dernière équation.
(Eq4$^{'''}$) donne $x_4 = 1$
(Eq3$^{''}$) donne $x_3 = \frac{1}{2}(-2 - 6x_4) = -4.$
(Eq2$^{''}$) donne $x_2 = 2 - 2x_3 - 3x_4 = 7.$
(Eq1) donne $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 = -3.$

Donc, la solution du (S_3) est

$$X = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

0.3 Résolution par la méthode de Cramer

Soit

$$(S_2) : \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & ... & ... & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & ... & .. & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & ... & .. & +a_{in}x_n & = b_i \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & ... & .. & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \tag{9}$$

un système d'équations linéaires à n équations et n inconnues. Ce système peut aussi s'écrire

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \tag{10}$$

On définit la matrice A_j comme suit

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & .... & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & .... & a_{1n} \\ a_{11} & & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & .... & a_{2n} \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ a_{11} & .... & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & .... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\uparrow$$
$j\grave{e}me$ colonne

Autrement dit, A_j est la matrice obtenue en remplaçant la jème colonne de A par le second membre B.

Théorème 1

Soit

$$AX = B$$

un système de n équations à n inconnues. Supposons que $\det A \neq 0$. *Alors l'unique solution du système est donnée par*

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \tag{12}$$

Démonstration
Nous avons supposé que

$$\det A \neq 0.$$

Donc A est inversible. Alors

$$X = A^{-1}B$$

est l'unique solution du système. D'autre part, nous avons vu que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^{t}C$$

où C est la matrice de cofacteurs. $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *avec* $c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$.

Donc

$$X = \frac{1}{\det A}{}^{t}CB$$

ce qui donne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & . & . & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & . & . & c_{n2} \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ c_{1n} & c_{2n} & . & . & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$x_1 = \frac{1}{\det A}\left(c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + ... + c_{n1}b_n\right)$$

$$x_i = \frac{1}{\det A}\left(c_{1i}b_1 + c_{2i}b_2 + ... + c_{ni}b_n\right)$$

$$x_n = \frac{1}{\det A}\left(c_{1n}b_1 + c_{2n}b_2 + ... + c_{nn}b_n\right)$$

Mais

$$c_{1i}b_1 + c_{2i}b_2 + ... + c_{ni}b_n$$

est le développement en cofacteurs de $\det(A_j)$ par rapport à sa ième colonne. Donc

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Exemple 4
Résolvons le système suivant :

$$(S_3) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 11 \end{cases} \tag{13}$$

La forme matricielle de (S_3) est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}}_{B}$$

On a :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 11 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

et

$$\det A = 13 \quad , \quad \det A_1 = 13$$

$$\det A_2 = 26 \quad , \quad \det A_3 = -39.$$

La solution est alors

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 1$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 2$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = -3$$

0.4 Résolution par la méthode de l'inverse du matrice des coéfficients

Soit le système suivant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

où $A \in M_n(\mathbb{k})$ est une matrice carrée inversible.
Alors, l'unique solution du système est donnée par

$$X = A^{-1}B$$

Exemple 5
Résolvons le système suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}}_{B}$$

Le determinant de la matrice A vaut 13, donc la matrice A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{7}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \end{pmatrix}$$

Alors, l'unique solution du système est donnée par

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{7}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

0.5 Nombre de solutions

Soit (S) un système de n équations linéaires à p inconnues.
Donc, (S) équivalent à :

$$AX = B$$

où $A \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ est la matrice des coefficients du système, $B \in M_{n,1}(\mathbb{k})$ est le vecteur de seconde membre et $X \in M_{p,1}(\mathbb{k})$.

0.5.1 Cas où n=p (A est une matrice carée)

Système homogène

Le système (S) est dit homogène si le second membre est nul $(B = 0)$.
L'ensemble des X tels que $AX = 0$ constitue le noyau de l'application associée à A. Le noyau contient toujours le vecteur nul, mais il peut contenir en plus des vecteurs non nuls.
Ce type de système a donc au moins une solution, la solution nulle.

♦ **Si A est inversible** $(\det A \neq 0)$
Le système a la solution unique $X = 0$, vecteur nul.

♦ **Si A n'est pas inversible** $(\det A = 0)$
Le système a une infinité de solutions (en plus la solution nulle).

Exemple 6
♦ Le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

a la solution unique $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le determinant de la matrice vaut -37, le rang de la matrice est 3.

♦ Le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

a une infinité de solutions $X = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $x_3 \in \mathbb{R}$,

L'ensemble de ces solutions constitue un éspace vectoriel de dimension 1 engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le determinant de la matrice vaut 0, le rang de la matrice est 2.

Système non homogène $(\mathbf{B} \neq \mathbf{0})$

♦ **Si** A **est inversible** $(\det A \neq 0)$

Le système a la solution unique $X = A^{-1}B$.

♦ **Si** A **n'est pas inversible** $(\det A = 0)$

Pour qu'il y ait au moins une solution, il faut que le rang de A soit le même que le rang de la matrice C, matrice formée par A à laquelle B est accolé.

Si X_0 est une solution particulière du système non homogène $AX = B$, donc on a :

$$AX_0 = B$$

Alors

$$A(X - X_0) = 0$$

On note $X^* = X - X_0$ est la solution de l'équation homogène.

Donc, la solution du système non homogène est $X = X^* + X_0$

Exemple 7

♦ Résolvons le système suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 26 \\ 19 \\ -20 \\ -30 \end{pmatrix}}_{B}$$

Le determinant de la matrice A vaut -149, donc la matrice A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{65}{149} & -\frac{59}{149} & \frac{69}{149} & -\frac{32}{149} \\ -\frac{9}{149} & -\frac{1}{149} & \frac{34}{149} & -\frac{46}{149} \\ \frac{3}{149} & \frac{50}{149} & -\frac{61}{149} & \frac{65}{149} \\ -\frac{32}{149} & \frac{13}{149} & \frac{5}{149} & \frac{2}{149} \end{pmatrix}$$

Alors, l'unique solution du système est donnée par

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{65}{149} & -\frac{59}{149} & \frac{69}{149} & -\frac{32}{149} \\ -\frac{9}{149} & -\frac{1}{149} & \frac{34}{149} & -\frac{46}{149} \\ \frac{3}{149} & \frac{50}{149} & -\frac{61}{149} & \frac{65}{149} \\ -\frac{32}{149} & \frac{13}{149} & \frac{5}{149} & \frac{2}{149} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 19 \\ -20 \\ -30 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

♦ Le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

n'a pas de solution.
On peut vérifier que le determinant de la matrice est 0,
Le rang de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}}_{B} \end{pmatrix}$$

est 3 et le rang de la matrice A est 2.

0.5.2 Cas où le nombre d'équations est différent du nombre d'inconnues (n≠p)

Dans ce cas la matrice A n'est pas carrée

n>p il y a plus d'équations que d'inconnues

Le système n'aura pas de solutions.
Exemple 8
Le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{B}$$

n'a pas de solution.
Pour le vérifier, soit on met en oeuvre la méthode de Gauss, ce qui précisera les impossibilités,

soit on détermine le rang de C et on compare à celui de A.
Le rang de la matrice

$$C = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & -3 \end{matrix}}_{A} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}}_{B} \right)$$

est 4 et le rang de la matrice A est 3.

n<p il y a moins d'équations que d'inconnues

Il y aura une infinité de solutions que l'on pourra expliciter en fonctions d'inconnues arbitraires à choisir.

Exemple 8

Le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

a une infinité de solutions $X = \begin{pmatrix} -\frac{13}{35} + \frac{3}{7}x_3 \\ \frac{4}{5} + 2x_3 \\ x_3 \\ -\frac{4}{5} + \frac{4}{7}x_3 \end{pmatrix}$ où $x_3 \in \mathbb{R}$.