Exercice 1:

Soit f l'application linéaire définie par:

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (x + y, 3z, 2y + z)$$

1. Déterminer $\ker f$, l'application f est-elle injective? Justifier votre réponse.
2. Donner une base de $\operatorname{Im} f$, l'application f est-elle surjective ? Justifier votre réponse.
3. Soient

$$u_1 = e_1 - e_2 + 2e_3, u_2 = e_1 + e_2, u_3 = 2e_1 + e_2 - e_3,$$

avec $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(a). Montrer que $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(b). Ecrire la matrice A associée à f dans la base B_0.
(c). Déterminer la matrice de passage P de B_0 à B_1 et et calculer P^{-1}.
(d). Ecrire la matrice $A^{'}$ associée à f dans la base B_1.

Solution:

Soit f l'application linéaire définie par:

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (x + y, 3z, 2y + z)$$

1. Déterminer $\ker f$, l'application f est-elle injective? Justifier votre réponse.

Par définition, on a:

$$\ker f = \left\{X = (x, y, z) \in E = \mathbb{R}^3 / f(X) = 0_F = 0_{\mathbb{R}^3}\right\}.$$

Donc, $X = (x, y, z) \in \ker f$ si et seulement si $f(X) = 0_F = 0_{\mathbb{R}^3}$.
On résout l'équation vectorielle $f(X) = 0_F$. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a:

$$f(X) = 0_F \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

alors,

$$\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

f est-elle injective?

Comme $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, alors f est une application injective.

2. Donner une base de $\operatorname{Im} f$, l'application f est-elle surjective ? Justifier votre réponse.
Par définition, on a:

$$\operatorname{Im} f = \left\{ f(X) / X = (x, y, z) \in E = \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Un vecteur $Y = (a, b, c)$ est dans l'image de f si et seulement si $\exists X = (x, y, z) \in E = \mathbb{R}^3, Y = f(X)$.
Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a:

$$\begin{aligned} f(X) &= (x + y, 3z, 2y + z) \\ &= (x, 0, 0) + (y, 0, 2y) + (0, 3z, z) \\ &= x\underbrace{(1, 0, 0)}_{u_1} + y\underbrace{(1, 0, 2)}_{u_2} + z\underbrace{(0, 3, 1)}_{u_3}, \end{aligned}$$

alors, $\operatorname{Im} f$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs
$u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (1, 0, 2)$ et $u_3 = (0, 3, 1)$.

$$\operatorname{Im} f = Vect\left(u_1(1, 0, 0), u_2(1, 0, 2), u_3(0, 3, 1)\right).$$

La famille $B = \{u_1(1, 0, 0), u_2(1, 0, 2), u_3(0, 3, 1)\}$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$. Elle est libre, car

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

Donc la famille B forme une base de $\operatorname{Im} f$.
f est-elle surjective?
On a:

$$rg(f) = \dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim F.$$

et $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de F, donc $\operatorname{Im} f = F$. Alors, f est une application surjective.
3. Soient

$$u_1 = e_1 - e_2 + 2e_3, u_2 = e_1 + e_2, u_3 = 2e_1 + e_2 - e_3,$$

avec $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(a). Montrer que $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On a

$$card(B_1) = \dim \mathbb{R}^3,$$

donc, il suffit de savoir s'elle est libre ou génératrice.
Comme

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

alors, B_1 est libre et donc elle forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(b). Ecrire la matrice A associée à f dans la base B_0.

On a:

$$f(e_1) = (1,0,0) = e_1 = 1 \times e_1 + 0 \times e_2 + 0 \times e_3,$$

donc, les éléments de la première colonne sont 1,0 et 0.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$f(e_2) = (1,0,2) = e_1 = 1 \times e_1 + 0 \times e_2 + 2 \times e_3,$$

donc, les éléments de la deuxième colonne sont 1,0 et 2.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et

$$f(e_3) = (0,3,1) = e_1 = 0 \times e_1 + 3 \times e_2 + 1 \times e_3,$$

donc, les éléments de la troisième colonne sont 0,3 et 1.

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c). Déterminer la matrice de passage P de B_0 à B_1:

On a:

$$u_1 = e_1 - e_2 + 2e_3$$

$$u_2 = e_1 + e_2$$

$$u_3 = 2e_1 + e_2 - e_3$$

Alors,

$$P = M_{B_1,B_0}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer P^{-1}.

$$P^{-1} = M_{B_0,B_1}(Id)$$

On a:

$$\begin{cases} u_1 = e_1 - e_2 + 2e_3 \\ \\ u_2 = e_1 + e_2 \\ \\ u_3 = 2e_1 + e_2 - e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = (u_2 - e_2) - e_2 + 2e_3 \\ \\ e_1 = u_2 - e_2 \\ \\ u_3 = 2\left(u_2 - e_2\right) + e_2 - e_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2e_2 + 2e_3 = u_1 - u_2 \\ \\ e_1 = u_2 - e_2 \\ \\ -e_2 - e_3 = u_3 - 2u_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\left(-u_3 + 2u_2 - e_3\right) + 2e_3 = u_1 - u_2 \\ \\ e_1 = u_2 - e_2 \\ \\ e_2 = -u_3 + 2u_2 - e_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_3 = \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 - \frac{1}{2}u_3 \\ \\ e_1 = \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{2}u_3 \\ \\ e_2 = -\frac{1}{4}u_1 + \frac{5}{4}u_2 - \frac{1}{2}u_3 \end{cases}$$

Alors,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode:

$$P^{-1} = \tfrac{1}{\det P}\,{}^{t}C$$

où C comatrice (matrice de cofacteurs).

$$C = \left(c_{ij}\right)_{1 \le i,j \le 3}$$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(P_{ij}\right)$$

avec P_{ij} matrice obtenue en supprimant la ième ligne et la jème colonne.

$$c_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad c_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad c_{13} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$
$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad c_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \quad c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$
$$c_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad c_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

donc,

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant de P:

$$\det P=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \text{ On effectue les opérations } \begin{array}{c} C_2 \leftarrow C_2+C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3+C_1 \end{array}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ On développe suivant la deuxième ligne.}$$

$$=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{2+j}\times p_{2j}\times \det(P_{2j})$$

$$=(-1)^{2+1}\times(-1)\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-4$$

Alors,

$$P^{-1}=\frac{1}{\det P}{}^tC=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(d). Ecrire la matrice A' associée à f dans la base B_1.
D'après la formule de changement de base, on a:

$$A'=P^{-1}\times A\times P$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & \frac{7}{4} \\ \frac{15}{2} & 1 & -\frac{15}{4} \\ -3 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Deuxième méthode:
On calcule les coordonnées des vecteurs $f(u_j)$ dans la base B_1 On a:

$$f(u_1)=f(1,-1,2)=(0,6,0)=\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3$$

$$=(\alpha+\beta+2\gamma,-\alpha+\beta+\gamma,2\alpha-\gamma)$$

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha+\beta+2\gamma=0\\-\alpha+\beta+\gamma=6\\2\alpha-\gamma=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha=-\frac{3}{2}\\\beta=\frac{15}{2}\\\gamma=-3\end{array}\right.$$

donc, les éléments de la première colonne sont $-\frac{3}{2}, \frac{15}{2}$ et -3.

$$C_1=\left(\begin{array}{c}-\frac{3}{2}\\\frac{15}{2}\\-3\end{array}\right)$$

De même manière, on trouve

$$f\left(u_2\right)=(2,0,2)=1\times u_1+0\times u_2+0\times u_3,$$

donc, les éléments de la deuxième colonne sont 1,1 et 0.

$$C_2=\left(\begin{array}{c}1\\1\\0\end{array}\right)$$

et

$$f\left(u_3\right)=(0,3,1)=\frac{7}{4}\times u_1-\frac{15}{4}\times u_2+\frac{5}{2}\times u_3,$$

donc, les éléments de la troisième colonne sont $\frac{7}{4}$,$-\frac{15}{4}$ et $\frac{5}{2}$.

$$C_3=\left(\begin{array}{c}\frac{7}{4}\\-\frac{15}{4}\\\frac{5}{2}\end{array}\right)$$

Alors,

$$A^{'}=\left(\begin{array}{ccc}-\frac{3}{2}&1&\frac{7}{4}\\\frac{15}{2}&1&-\frac{15}{4}\\-3&0&\frac{5}{2}\end{array}\right)$$