USTO MB- Faculté des Mathématiques et Informatique
Département d'Informatique
Examen final du module Algèbre II - 14/05/2024 - Durée : 1h30mn

Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1: (06 Points)
1. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $u = (1, 0, 1), v = (2, 1, 0), w = (t, -1, 2)$
Donner une condition sur $t \in \mathbb{R}$ pour que les vecteurs u,v et w forment une famille libre dans $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la définition du rang d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel.
3. Donner la définition du rang d'une application linéaire, et énoncer le théorème du rang.
4. Soit f une application linéaire de E dans F.
- Montrer que $\ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E.

Exercice 2: (05 Points)
Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - 2z = 0\right\}$$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer une base de F ainsi $\dim F$.
3. Soit G le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(0, 1, 1)$.
Déterminer $E \cap F$ et en déduire que $E = F \oplus G$

Exercice 3: (04 Points)
Soit B la matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que B est inversible
2. Calculer $B^3 - 2B^2 + I_3$ avec I_3 la matrice unité.
3. En déduire l'inverse de B

Exercice 4: (05 Points)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\ker f$ ainsi que $\operatorname{Im} f$.
2. On considère la famille B' de $\mathbb{R}^3$.

$$B' = \{u_1 (1, 0, -1), u_2 (1, 1, 0), u_3 (1, 1, -1)\}$$

(a). Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.
(b). Ecrire la matrice associée à f dans la base B'.

Corrigé Examen Final d'Algèbre 2
2023-2024

<u>Exercice 1:</u> (06 Points)

1. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $u = (1, 0, 1)\,, v = (2, 1, 0)\,, w = (t, -1, 2)$

Donner une condition sur $t \in \mathbb{R}$ pour que les vecteurs u, v et w forment une famille libre dans $\mathbb{R}^3$.

La famille $\{u, v, w\}$ soit libre si $\det(uvw) \neq 0$

On a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & t \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -t$$

(01)

donc,

$$\det(uvw) \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0$$

La famille $\{u, v, w\}$ soit libre si $t \in \mathbb{R}^*$.

2ème méthode: Résolvons l'équation

$$\alpha u + \beta b + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}, \quad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

2. Donner la définition du rang d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel.

Le rang d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel est la dimension de sous espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

$$rg(\{u_1, u_2, ..., u_n\}) = \dim(vect(u_1, u_2, ..., u_n))$$ (01)

3. Donner la définition du rang d'une application linéaire, et énoncer le théorème du rang.

Le rang d'une application linéaire $f : E \to F$ est la dimension de l'image de f.

$$rg(f) = \dim \operatorname{Im} f.$$ (01)

et le théorème du rang:

$$rg(f) + \dim(\ker f) = \dim(E)$$ (01)

4. Soit f une application linéaire de E dans F.

- Montrer que $\ker(f)$ **est un sous espace vectoriel de** E**.**

On a:

(i). $f(0_E) = 0_F$, donc $0_E \in \ker f$

(ii). Soient $u, v \in \ker f$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.

$$\alpha u + \beta v \in \ker f?$$

On a: (02)

$$\begin{aligned} & u, v \in \ker f \Rightarrow f(u) = 0_F = f(v) \\ & \Rightarrow \alpha f(u) = 0_F = \beta f(v) \Rightarrow \alpha f(u) + \beta f(v) = 0_F + 0_F = 0_F \\ & \Rightarrow f(\alpha u + \beta v) = 0_F \Rightarrow \alpha u + \beta v \in \ker f \end{aligned}$$

De (i) et (ii) on déduit que $\ker f$ est un sous espace vectoriel de E.
<u>Exercice 2:</u> (05 Points)
Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - 2z = 0\right\}$$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
On a:
(i). $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$ **(0.5)**
(ii). Soient $u\,(x, y, z)\,, v\left(x', y', z'\right) \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{k} = \mathbb{R}$.

$$\alpha u + \beta v = \left(\underbrace{\alpha x + \beta x'}_{a}, \underbrace{\alpha y + \beta y'}_{b}, \underbrace{\alpha z + \beta z'}_{c}\right) \in F?$$

On a: **(01)**

$$\begin{aligned} a - b - 2c &= \alpha x + \beta x' - \left(\alpha y + \beta y'\right) - 2\left(\alpha z + \beta z'\right) \\ &= \alpha\,(x - y - 2z) + \beta\left(x' - y' - 2z'\right) \\ &= \alpha\,(0) + \beta\,(0) \qquad (u, v \in F) = 0 \end{aligned}$$

d'où $\alpha u + \beta v \in F$.
De (i) et (ii) on déduit que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de F ainsi $\dim F$.
Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$X = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow x - y - 2z = 0 \Leftrightarrow x = y + 2z$$

Donc,

$$X = (y + 2z, y, z) = y\underbrace{(1, 1, 0)}_{u_1} + z\underbrace{(2, 0, 1)}_{u_2}.$$

Alors,

$$F = vect\,(u_1, u_2)\,.$$

(01)

Donc $B = \{u_1, u_2\}$ est une famille génératrice de F. Puisque u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc $B = \{u_1, u_2\}$ est aussi une famille libre et donc B est une base de F.

$$\dim F = card\,(B) = 2.$$ **(0.5)**

3. Soit G le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(0, 1, 1)$.
Déterminer $F \cap G$
Résolvons l'équation $X_F = X_G$
On trouve le système suivant

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x = 0 \\ y = z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x = 0 \\ y = z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2\lambda \\ x = 0 \\ y = z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Donc, **(01)**

$$F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}\,.$$

En déduire que $E = F \oplus G$

On a: $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\dim F + \dim G = 3 = \dim E$, alors $E = F \oplus G$. **(01)**

Exercice 3: (04 Points)

Soit B la matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que B est inversible

On sait que: B est inversible si et seulement si $\det B \neq 0$.

On a:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \text{ on développe suivant la troisième ligne}$$

$$= (-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

(01)

Alors, la matrice B est inversible.

2. Calculer $B^3 - 2B^2 + I_3$ avec I_3 la matrice unité.

On a:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(02)

donc,

$$B^3 - 2B^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. En déduire l'inverse de B

On a:

$$B^3 - 2B^2 + I_3 = 0 \Leftrightarrow B \times \left(2B - B^2\right) = \left(2B - B^2\right) \times B = I_3$$

Alors,

$$B^{-1} = 2B - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(01)

Deuxième méthode

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} {}^{t}C, \text{ avec } C \text{ matrice de cofacteurs.}$$

$$C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}, \qquad c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(B_{ij})$$

avec B_{ij} matrice obtenue en supprimant la ième ligne et la jème colonne. Donc,

$$B^{-1} = \left(\frac{1}{-1}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4: (05 Points)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\ker f$ **ainsi que** $\operatorname{Im} f$.

On a:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (4x - 2y + 3z, 3x - y + 3z, -2x + 2y - z)$$ **(01)**

Par définition, on a:

$$\ker f = \left\{ X = (x, y, z) \in E = \mathbb{R}^3 / f(X) = 0_F = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}.$$

On résout l'équation vectorielle $f(X) = 0_F$. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a:

$$f(X) = 0_F \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0,$$

(01)

alors,

$$\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

Déterminer $\operatorname{Im} f$

Par définition, on a:

$$\operatorname{Im} f = \left\{ f(X) / X = (x, y, z) \in E = \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a:

$$\begin{aligned} f(X) &= (4x - 2y + 3z, 3x - y + 3z, -2x + 2y - z) \\ &= x\underbrace{(4, 3, -2)}_{w_1} + y\underbrace{(-2, -1, 2)}_{w_2} + z\underbrace{(3, 3, -1)}_{w_3}, \end{aligned}$$

alors, $\operatorname{Im} f$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs
$w_1 = (4, 3, -2), w_2 = (-2, -1, 2), w_3 = (3, 3, -1)$. **(01)**

$$\operatorname{Im} f = Vect\left(w_1 (4, 3, -2), w_2 (-2, -1, 2), w_3 (3, 3, -1)\right).$$

2. On considère la famille $B^{'}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$B^{'} = \{u_1 (1, 0, -1), u_2 (1, 1, 0), u_3 (1, 1, -1)\}$$

(a). Montrer que $B^{'}$ est une base de $\mathbb{R}^3$
On a

$$card\left(B^{'}\right) = 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

donc, il suffit de savoir s'elle est libre ou génératrice.
Comme **(01)**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

alors, $B^{'}$ est libre et donc elle forme une base de $\mathbb{R}^3$.
(b). Ecrire la matrice associée à f dans la base $B^{'}$.
On calcule les coordonnées des vecteurs $f(u_j)$ dans la base $B^{'}$ On a:

$$f(u_1) = (1, 0, -1) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = u_1 \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$$

donc, les éléments de la première colonne sont 1,0 et 0.

$$f(u_2) = (2, 2, 0) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 2u_2 \Leftrightarrow\Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 2, 0)$$

donc, les éléments de la deuxième colonne sont 0,2 et 0.

$$f(u_3) = (-1, -1, 1) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = -u_3 \Leftrightarrow\Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, -1)$$

donc, les éléments de la troisième colonne sont 0,0 et -1.Alors,

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ **(01)**

Deuxième méthode:
D'après la formule de changement de base, on a:

$$D = M_{B'}(f) = P^{-1} \times A \times P$$

où P la matrice de passage de B à $B^{'}$.

$$P = M_{B'B}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^{t}C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$